FONDO PIZZOFALCONE

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio XXVII

Palchetto 6

Num.° d' ordine 100

20324

19 c. 8

NAZIONALE
B. Prov.
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III
2565
NAPOLI

B. Prov
I
2565

Digitized by Google

SBN
608795

NUOVO SISTEMA

DI

STUDI GEOMETRICI

ANALITICAMENTE DEDOTTI DALLO SVOLGIMENTO SUCCESSIVO
DI UNA SOLA EQUAZIONE

DI

FERDINANDO DE LUCA

CAVALIERE DELL' IMPERIALE ORDINE DI CRISTO DEL BRASILE; SEGRETARIO GENERALE DELLA SOCIETA' REALE BORBONICA (RR. ACCADEMIE ERCOLANESE, DELLE SCIENZE E DELLE BELLE ARTI); SOCIO ORDINARIO DELLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE E DEL REAL INSTITUTO D'INCORAGGIAMENTO, SOCIO RESIDENTE DELL' ACCADEMIA PONTANIANA; CORRISPONDENTE DELL' INSTITUTO STORICO DI FRANCIA; DELL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI BRESLAVIA, DELL' ACCADEMIA DI GOERLITZ, E DELL' ACCADEMIA GIOENIA DI SCIENZE NATURALI DI CATANIA; SOCIO ONORARIO DELL' IMPERIALE INSTITUTO STORICO-GEOGRAFICO DI RIO JANEIRO, DELLA SOCIETA' DE' NATURALISTI DI NASSAU; E DELL' ACCADEMIA DEGLI ASPIRANTI NATURALISTI: CORRISPONDENTE DELLA REALE ACCADEMIA DI LUCCA, DELL' ACCADEMIA IL PETRARCA DI AREZZO; DELLA SOCIETA' AGRARIA DI BOLOGNA: DE' RISORGENTI DI OSIMO, DELLA COLOMBARIA FIORENTINA, DELL' A. DEGL' INCAMINATI DI MOCIGLIANA, CORRISPONDENTE DI VARIE SOCIETA' ECONOMICME E DI ALTRE ACCADEMIE DEL REGNO EC.

Nisi utile est quod facimus stulta est gloria.
FEDRO.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

NAPOLI
STAMPERIA E CARTIERE DEL FIBRENO
Strada Trinità Maggiore N.° 26.

1847

Digitized by Google

A

ADRIANO BALBI

PATRIZIO VENETO

LUME ED ORNAMENTO DELL'ITALIA

AUTORE DELLA STATISTICA DEL REGNO DI PORTOGALLO

DELL'ATLANTE ETNOGRAFICO DEL GLOBO

DEL COMPENDIO DI GEOGRAFIA E

DEGLI ELEMENTI DI GEOGRAFIA GENERALE

SCRITTORE DI UN GRAN NUMERO DI MEMORIE

SOPRA OGNI MATERIA GEOGRAFICO-STATISTICA

DA PRESSO A MEZZO SECOLO

AL CUI MERITO SCIENTIFICO

L'AUGUSTA MAESTA' I. R. A. DI FERDINANDO DI AUSTRIA

CONCEDEVA L'ONORE DI SUO CONSIGLIERE

DECORATO DE' PRINCIPALI ORDINI CAVALLERESCHI DI EUROPA

SOCIO DELLE ACCADEMIE PIÙ ILLUSTRI

IL CUI NOME

PER L'ULTIMA NAVIGAZIONE DEL LAMENTATO D'URVILLE

RIFULGE SULLA VETTA CULMINANTE DELL'AUSTRALIA

EPPERÒ CHIARISSIMO PER ALTE QUALITA' DELLA MENTE E DEL CUORE

QUEST'OPERA

IN PEGNO DI SENTITA STIMA ED AMICIZIA

OFFRE IL SUO AMICO E COLLEGA

FERDINANDO DE LUCA

Digitized by Google

PREFAZIONE DELL'AUTORE

(Prima di cominciare la lettura dell'opera si legga questa prefazione).

Due cose principalmente io dirò a quelli che si daranno la pena di leggere questa mia opera: la prima è che io nulla ho tratto dagli altri autori, nè il poteva; poichè mi sono proposto di *ricostruire* la scienza geometrica su di nuove basi; o per dir meglio ho creduto utile cosa e degna di una scienza tutta razionale il trarla da unico principio; lavoro non per anche fatto, per quanto è a mia notizia: la seconda è che io mi sono assoggettato alle durissime condizioni didascaliche. Senza di questa seconda condizione, il mio lavoro, di sua natura piano ed agevole a trattarsi da qualsiasi analista, sarebbe riuscito assai più breve di questo che pure è brevissimo; poichè tale è l'indole dell'analisi da aggruppare sotto una stessa formola tutt'i teoremi che vanno compresi in una stessa enunciazione generale, da risolversi poi ne' teoremi singolari per mezzo di speciali ipotesi (*a*): ma per effetto del metodo didascalico per me prescelto, mentre ho dovuto disporre le cose in modo che le teoriche conse-

(*a*) Ciò rilevasi in varii luoghi di quest'opera: vedi p. 25, n.° 34; p. 29, n.i 39 e 40; pag. 59 rig. 3, 4, 5..., pag. 62 (*) ec.

guenti si attaccassero alle precedenti, ho anche dovuto proccurare che ogni ricerca avesse uno svolgimento particolare.

Dopo queste avvertenze, se qualcheduno vorrà leggere questa mia operetta con ispirito di critica, lo faccia pure: io accetterò di buon grado quella critica il cui scopo è l'avanzamento della scienza e de'metodi, e farò tesoro delle *sagge* riflessioni tendenti ad illuminarmi. Ma spregerò poi la censura; e se qualche *momo* vi fosse, certo non potrà esser geometra, nè avrà mai lottato colle difficoltà di una sola nuova ricerca, fosse la più semplice. Poichè se è sempre lodevole ed utile e non senza difficoltà una nuova dimostrazione di qualche teorema, i soli ignoranti, avvezzi a ciarlare intorno a quello che sanno e che non sanno, potrebbero dire privo del tutto d'importanza e di malagevolezza e spacciare anche come pericoloso il rifacimento analitico di tutta una scienza e'l nuovo ordinamento di essa intorno ad un solo principio (*a*).

Ma mi si dirà

In questo di Procuste orrido letto
Chi ti sforza a giacer?...:

Che bisogno, potranno dire taluni, vi era di un nuovo ordinamento geometrico, dopo le tante e pregevolissime opere che possiede la scienza? A questi, se ve ne fossero, risponderò con due domande: 1.ª Credono essi, logicamente parlando, che potesse essere di qualche importanza un'opera geometrica ridotta ad unità di principio? 2.ª La scienza possiede nello stato presente un'opera nella quale da unico prin-

(*a*) L'autore si dichiara grato alle osservazioni fattegli da' dotti nel VII Congresso scientifico; fra'quali gli gode l'animo di rammentare l'illustre signor Gio. Majocchi e due distinti uffiziali napoletani del Real Corpo di Artiglieria.

cipio vengono a mano a mano svolgendosi, la geometria piana solida e sferica e le due trigonometrie? Se la scienza mancasse di questo lavoro, le tante pregevolissime opere che ora abbiamo, lungi dal farne conchiudere l'inutilità, ne mostrerebbero anzi il bisogno e l'importanza tanto più in quanto che manca. Or io pregherei costoro d'indicarmi il titolo dell'opera di cui quì si parla. In quanto a me confesso che nel mio lungo esercizio dell'insegnamento matematico per ben quarant'anni non ne ho conosciuto una sola, nè attualmente è mia notizia che vi sia, a meno di una serie di dotte memorie intorno alla Trigonometria sferica scritte dopo il Bertrand, dal 1778 fino a tempi nostri, la maggior parte dedotte analiticamente dall'equazione trinomia fra'tre lati ed un angolo, e quindi somiglianti fra loro. Epperò, se la cennata mancanza realmente esistesse, come sembra risultare da notizie di fatto, pare che io non abbia perduto il mio tempo: poichè se io fossi realmente riuscito nel mio proposito, del che giudicheranno i Dotti, alle tante pregevolissime opere ora esistenti sarebbe aggiunta quella sola che mancava.

Per ciocchè risguarda poi l'importanza delle opere ridotte ad unità di principio, volendo rimanere ne'soli limiti delle matematiche, risponderò colla dottrina e coll'esempio dell'immortale Lagrangia, e di tanti altri sommi geometri; « La « perfezione nell'Analisi, dice il Principe degli Analisti (*a*), « consiste nel non *impiegare che il minor numero possibile di* « *principii*, e in far derivare da questi principii tutte le ve- « rità ch'essi possono racchiudere per mezzo delle sol'ana- « lisi ». Or può esservi minor numero di uno? Epperò se i Dotti conoscessero nel mio lavoro la dipendenza delle verità geometriche e trigonometriche dall'unica equazione fonda-

(*a*) Memorie concernente la soluzione di alcuni problemi relativi a'triangoli sferici. Tom. I. del Giornale della Scuola Politecnica.

mentale per me prescelta, pare che le mie fatiche non sarebbero state inutili nè perdute.

Nè si arrestò il Lagrangia al solo precetto; ma egli stesso ne diede l'esempio: e niuno più di lui rinnovellò ed estese tutte le matematiche, e ne creò nuove branche; e l'esempio suo fu seguito da quanti geometri posero la loro gloria nell'imitarlo. Ed infatti esisteva il Calcolo Infinitesimale ed esisteva sotto due forme, quella degl'infinitesimi e l'altra de'limiti, quando Lagrangia ne fece una derivazione dal teorema di Taylor svolto in serie colle sole forze dell'Algebra. E pure esisteva la Meccanica ed era ricca de'principii della leva, di quello del parallelogrammo delle forze, di d'Alembert ec., quando l'immortale Geometra Italiano le diede a fondamentale sostegno l'unico principio delle velocità virtuali, invenzione felice di un altro Genio Italiano, Galilei. E i Principî matematici della Filosofia Naturale del Newton erano già familiari a'geometri; e l'Astronomia contava un Maskeline, un Lalande, un Piazzi..., quando Lagrangia aprì al profondo La Place il campo che doveva egli percorrere per lungo e per largo, fondando tutte le verità della Meccanica Celeste sulla legge della gravitazione universale. E se risaliamo a' tempi antichi, vedremo pure Archimede inventare il metodo di Esaustione come unico mezzo in quel tempo per passare dal finito nelle regioni dell'Infinito; e dare alla Statica il principio della leva e all'Idrostatica quello su cui poggia la legge dell'equilibrio de'fluidi. La Storia delle matematiche ci mostra ad ogni passo gli sforzi fatti da'geometri di tutt' i tempi per rintracciare di questi principî generali. Epperò noi vediamo il Calcolo in possesso di tre di essi: il principio degl'Indivisibili sostituito, come metodo sommatorio, a quello di Esaustione; e'l principio de'minimi quadrati, tanto utile in astronomia, per determinare una posizione che si allontanasse il meno possibile in tutt'i sensi dalle al-

tre osservate, e ben altri molti principî e geometrici e statici e dinamici. Lo che debbe considerarsi come l'effetto naturale dell'attività dell'ingegno umano che si sforza continuamente di aprirsi delle nuove vie e più spedite nel campo delle scienze.

E vedete quanto può il desiderio dell'immegliamento di cui è pieno il cuore umano. Appena fu fatta palesa l'influenza delle funzioni circolari su tutte quante le matematiche pure e miste, che si videro, l'uno dopo l'altro il Bertrand (*a*), l'Eulero (*b*), il de Gua (*c*), Lagrangia (*d*), il Cagnoli (*e*), il Delambre (*f*), il Legendre (*g*), il Franchini (*h*), l'Oriani (*k*), il Carnot (*l*), il Puissant (*m*), l'autore de'Paralleli delle Trigonometrie (*n*), il Mascheroni (*p*), il Lhuiller (*q*), il Reynaud (*r*), il Fergola (*s*) e tanti altri affaticarsi a *ricostruire* analiticamente la Trigonometria Sferica, servendosi del minor numero possibile di principî. Poichè, avendo il Principe degli Analisti creata la Nuova Geometria delle coordinate, e trattati i problemi più difficili della Filosofia Naturale co'nuovi metodi da lui inventati, dimostrò che le fun-

(*a*) Développement de la partie élémentaire des matématiques, 1778.
(*b*) Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae 1779.
(*c*) Académie des Sciences 1785.
(*d*) Sixième cahier de l'Ecole Polytechnique.
(*e*) Trigonometria Piana e Sferica.
(*f*) Traité Compl. de Astronomie théor. et pratique.
(*g*) Traité de Trigonom. Notes à la géométrie.
(*h*) Trattato analitico di Trigonom. e Poligonom. Piana e Sferica.
(*k*) Elementi di Trigonometria Sferoidica. Opuscoli Astronomici di Milano.
(*l*) De la correlation des figures.
(*m*) Traité de Géodésie; Traité de Topographie.
(*n*) Tome XII delle Memorie della Società Italiana delle Scienze.
(*p*) Problemi per gli Agrimensori.
(*q*) Polygonometrie et Poliedrometrie.
(*r*) Tables de Logarith. de Lalande publiès par Reynaud.
(*s*) Tomo I degli Atti della R. Accademia delle Scienze di Napoli.

zioni circolari somministrano forma e linguaggio alla novella geometria ed alla fisica matematica; e che co'simboli delle funzioni circolari possano solamente rappresentarsi i fenomeni naturali soggetti a certi periodi.

Il principio fondamentale di tutte queste opere e memorie trigonometriche, a meno di sole tre o quattro, è la formola trinomiale fra'tre lati e un angolo sferico. Il Franchini, l'Autore de' Paralleli delle Trigonometrie, il Lhuiller, il Carnôt hanno adottato de' principii differenti. Poichè il Franchini ha posto a capo della sua analisi la formola binomia fra due lati e i due angoli opposti de'triangoli rettilinei, comechè moltissime ricerche escano dalla dipendenza del principio da lui adottato, fra le quali le note formole del seno e del coseno della somma e della differenza di due archi. L'autore de' Paralleli delle Trigonometrie deduce le formole de'triangoli sferici dall'analisi del tetraedro iscritto in un cono retto, in modochè, cambiatosi il medesimo come ultimo suo limite in prisma retto, ne deduce egli le formole per l'analisi de' triangoli rettilinei. Il Carnôt prese a disamina la poligonometria e la poliedrometria sotto nuove vedute. Egli non le considerò come risultamento di un'analisi algebraica di talune equazioni primordiali: ma esaminando le relazioni ch'esistono fra le rispettive distanze di quattro punti sopra un piano e di cinque nello spazio, considerati a due a due, mostrò quali vantaggi potevano risultarne alla geometria. I problemi per gli Agrimensori del Mascheroni, comechè di utili novità ridondanti, talune delle quali relative a' poliedri; comechè facciano gran parte del merito della poligonometria e poliedrometria del Lhuiller, pure quelli e questa non appartengono a quella specie di lavori analitici il cui pregio dipende, secondo la dottrina di Lagrangia, dal minor numero de' principii impiegati a svolgerli analiticamente. La memoria del Fergola ha per oggetto il mostrare come dal noto teorema

di Tolomeo sul tetragono iscritto nel cerchio possono dedursi agevolmente i teoremi delle sezioni angolari del Vieta e del Wallis e le verità principali della trigonometria analitica de' moderni. E questo mio lavoro poi è unicamente fondato sull'equazione trinomia fra gli angoli di un triangolo rettilineo o sferico e i suoi lati, equazione che io non conosco di essere stata da altri impiegata a base di simili svolgimenti analitici.

Due conseguenze risultano da questi cenni storici. La prima è che la scienza mancava di un lavoro analitico a cui potesse rassomigliarsi quello che io ho cercato di fare: la seconda, che se tante memorie risguardanti una sola branca della geometria, e tutte rassomigliantisi per lo scopo e per lo principio, non sono state credute inutili all'avanzamento della scienza, spero almeno che colla stessa indulgenza voglia risguardarsi questa mia opera; 1° perchè non alla sola Trigonometria ho limitato le mie ricerche, ma a tutta la Geometria; 2° perchè l'analisi mia non ha nulla di simile con quella de'prelodati geometri nè nello scopo, nè nel principio fondamentale per me adottato; e se il Legendre ha consagrato pure alcune note allo svolgimento analitico di talune ricerche di geometria pura, questo lavoro, comechè pregevolissimo, è tutt'altra cosa che un ordinamento della scienza geometrica. Le dodici note del Legendre sono delle indagini separate che suppongono nota la geometria, e la maggior parte contiene degli svolgimenti non elementari. Alcune di esse sono delle analisi comparate di concetti geometrici presi a disamina col metodo euclideo e con altro più analitico: e tutte poi non hanno, in quanto al metodo, nulla di comparabile coll'analisi da me seguita, tutta elementare, tutta piana, tutta derivante dallo stesso principio: 3° perchè avendo io considerata la geometria e la trigonometria ne'suoi rapporti con un principio fondamentale, queste scienze hanno

potuto esser ridotte alla massima brevità e semplicità: cosicchè gli studî matematici primordiali, a compiere i quali co' metodi misti finora in uso non bastano due anni, possono recarsi a compimento in pochi mesi.

Nè credasi che colla proposta di questo mio lavoro io abbia avuto l'idea d'invilire il metodo dell'insegnamento matematico finora in uso. Iddio mi guardi da questa sinistra interpetrazione dello scopo che mi sono proposto: e basterebbe a smentirla la nota che io lessi alla R. Accademia delle Scienze, la quale è inserita nel quaderno 60 del Progresso (nuova serie) dalla pag. 197 alla 207. La Geometria Antica e la così detta Cartesiana, e que'capi d'opera scritti coll'uno e l'altro metodo, sono tali che non si può essere geometra di professione senza quel

« *Nocturna versate manu, versate diurna* ».

Ma oggi non trattasi solo di formare de'geometri: oggi le matematiche si sono incarnate talmente con tutte le scienze fisiche e coll'industria, che a ragione scriveva quel bell'ingegno di Carlo Dupin « Dans l'état actuel des sciences il n'est pas permis d'ignorer les mathèmatiques et la chimie ». Oggi lo scopo delle matematiche non è solo quello di dirigersi al perfezionamento dell'intelletto; ma esse sono divenute, sotto la forma analitico-numerica, il primo e più possente strumento della civiltà odierna, lo spirito di tutte le scienze, di tutte le arti, il principio produttore di quella industria che crea e distribuisce le ricchezze. Che uso farebbe della geometria antica o cartesiana il politico il negoziante che hanno continuo bisogno delle svariate applicazioni dell'aritmetica sociale? Sopprimete il linguaggio e la forza dell'analisi numerica, la fisica e la chimica che per essa hanno fatto in mezzo secolo de'progressi così stupendi, tornerebbero a quel rac-

cozzamento d'ipotesi che s'incarnavano con una serie di sperimenti empirici non sempre di accordo colle teoriche. La Geodesia sorta da 50 anni dal seno dell'analisi moderna, la quale ha fatto a tutte le scienze fisiche al commercio e alla società l'immenso dono del sistema metrico, la Geodesia tornerebbe nel nulla. La Tecnologia ridotta a delle formole poste alla intelligenza fin degli stessi ignoranti costruttori; questa scienza dell'industria e delle arti sorta dal seno del sapientissimo sistema metrico e scritta col linguaggio dell'analisi numerica, scomparirebbe. Addio machine a vapore; addio i prodigi di quella meccanica industriale la quale non si appoggia al sagrifizio di migliaja di schiavi condannati a soddisfare l'orgoglio di un despota, ma scende dal sapiente e conciso linguaggio di poche formole che danno all'artefice il mezzo di produrre certamente e senza rischio quell'effetto utile che gli bisogna, e di opporre alla forza de' movimenti e alla gravezza delle masse quelle resistenze che ne assicurano l'effetto senza tema di pericoli. Le stesse scienze morali, fra le quali la logica de' probabili in ogni maniera di giudizî, e l'Economia Pubblica quale vantaggio non ritraggono dal calcolo delle probabilità la cui esposizione ha ricevuto dall'analisi moderna una nuova vita e un'applicazione estesa e svariata? (*a*)

Riepilogando ecco a che riducesi l'argomento. Le matematiche possono studiarsi con tre linguaggi differenti, quello dell'antica geometria e dell'analisi cartesiana, l'altro dell'analisi numerica. Le prime due, sapientissime e profonde indagatrici de' concepimenti astratti, non sono adatte a tutte le applicazioni quassù cennate, epperò non sono state appli-

(*a*) Il celebre Poisson, poco prima che la morte lo involasse alle scienze, leggeva all'Accademia di Francia una sua memoria intitolata « Recherches sur la probabilité des jugements en matière civile et en matière criminelle, précedès des regles générales du calcul des probabilités ».

cate alle svariate branche dell'industria: la terza non meno sapiente delle prime, per ciocchè risguarda la sua influenza sullo sviluppo delle facoltà mentali, ha poi ricevuta una speciale applicazione a tutte le scienze, a tutte le arti, alla meccanica industriale, alla tecnologia, onde è divenuta la condizione principale di ciocchè dicesi civiltà del Secolo XIX. Lo svariato movimento delle macchine, sia per forze brute, sia per quella delle animate: la costruttura di tutti gli elementi di questo movimento e delle loro dimensioni, secondo le resistenze che debbono vincere; i limiti di tutte le forze e sopratutto di quella del calore in tutt'i prodotti industriali; le calcolazioni di tutt'i fenomeni naturali soggetti a misura; tutte queste cose hanno ricevute dalla nuova lingua algebraica delle formole speciali scritte col linguaggio del sistema metrico, che il dotto intende e che l'ignorante, senza comprenderne il magistero, sa impiegare senza rischio, sol che sia stato istruito del facilissimo modo di leggerle; laddove le formole dell'antica geometria e della geometria cartesiana rimangono sempre ascose a quelli che non ne sanno penetrare il senso.

In questo stato di cose la quistione se l'istruzione generale nelle matematiche debba esser fatto coll'antico o col nuovo sistema, può esser così *formolata*. « Vorremo avere « degli artefici istruiti, degli stabilimenti industriali, de'gio- « vani attivi che a larga mano dirigonsi per le svariate vie « dell'industria animatrice della pubblica e della privata for- « tuna; e vorremo, oltreacciò, avere de'giovani che nello « studio delle diverse professioni ritirino dalle matematiche « quel vantaggio che solo può loro promettere l'analisi mo- « derna? O pure vorremo contentarci di quella instruzione « che parla solo all'intelletto, che dirigesi a pochi perchè « pochi possono seguirla, e che rimane inoperosa e vaga, « com'era quella de'nostri maggiori? »

La risposta leggesi in quell'apotegma. « Nisi utile est quod « facimus stulta est gloria. » Sia pure serbata ogni venerazione alla geometria antica ed all'analisi cartesiana: ed io che nella prima mia età ho studiato questi metodi, protesto che quante volte ho meditato le gravi opere scritte con quel linguaggio, tante volte ho dovuto ammirare la profondità e la eleganza di que'metodi, comechè mancanti di quella generalità tutta propria dell'analisi numerica. Epperò è indispensabile che queste branche delle matematiche siano studiate da quelli che aspirano all'alloro geometrico. Ma quelli che debbono studiare le matematiche per gli svariati usi sociali, non è più ragionevole che le studiino con quello stesso linguaggio col quale debbono leggerne i risultamenti? Non sarebbe egli un perder tempo, una inconsiderazione lo studiare un linguaggio che poi si dee abbandonare per intraprendere lo studio dell'altro linguaggio analitico ch'è il solo col quale sono esposte le nostre scienze, la fisica, la meccanica, la geodesia, la tecnologia? E non è più ragionevole e vantaggioso il cominciare e il proseguire lo studio matematico con questo solo?

Ed ecco messo in chiaro lo scopo che io mi sono prefisso. Ecco perchè ho pensato che sarebbe tornato assai vantaggioso l'offrire alla studiosa gioventù un libro che contenesse tutti gli studî elementari della geometria esposti col solo linguaggio analitico-numerico, e tanto più utile se tutta la scienza uscisse da un solo principio come un fiume dalla sua sorgente. Poichè meco mi maravigliava che, mentre in poco più di mezzo secolo tanto si è fatto per allargare i confini delle scienze matematiche e per perfezionarne il linguaggio e i metodi, niun miglioramento poi non erasi neppure tentato per dare alla istruzione elementare un andamento più semplice e più atto a'progressi della scienza ed alle sue mirabili applicazioni alla industria. Epperò volli accingermi a

questo lavoro di cui questo libro è il risultamento. Io non ho la presunzione di credere che ne ho conseguito nel miglior modo lo scopo prefissomi: spetta all'imparzialità de' veri dotti questo giudizio. Ma questo mio lavoro è pur qualche cosa, se esso potesse farne sorgere un altro più semplice e più perfetto; e più di tutto se potesse contribuire ad allargare l'insegnamento elementare delle matematiche, e renderlo comune a tutte le professioni, e sopratutto a quelli che si danno all'esercizio delle arti ed allo studio della tecnologia. Se a tutto questo io potessi sperare di aver data una spinta con questa mia operetta, sarei abbastanza compensato delle mie fatiche, e di non aver disprezzata la prima idea che mi si affacciò al pensiero.

Dopo tutte le cose premesse, pare che possa conchiudersi che nè io abbia tentato cosa inutile, perchè nuova; nè che sia stato mio pensiero l'invilire gli studì geometrici finora in uso; poichè il solo scopo che mi sono prefisso è stato quello di rendere gli studì elementari della geometria più brevi, più piani e più atti alle applicazioni che le matematiche hanno ricevute a'tempi nostri.

Pertanto passo a dare una breve sposizione del cammino per me seguito. Sulle prime per mezzo di definizioni e di alcune elementari considerazioni ho esposto il linguaggio geometrico: e dalla natura delle linee trigonometriche, considerate come rapporti al raggio di un cerchio qualunque, ho conchiuso la costanza di questo rapporto per uno stesso arco, comunque varii il raggio: ed ho voluto analizzare questo principio fondamentale della mia analisi in varî modi. Applicato questo principio ad un triangolo qualunque diviso in due triangoli rettangoli con una perpendicolare abbassata da uno de'suoi angoli sul lato opposto, ne ho dedotta la mia equazione cardinale la quale è la nota formola fra'cinque elementi di un triangolo rettilineo, i tre lati e due an-

goli. E da questa formola ho fatto uscire, con delle debite ipotesi e in una maniera tutta elementare, i teoremi della geometria piana, della trigonometria rettilinea e sferica, e della geometria sferica: ed ora appoggiandomi a'teoremi dimostrati, ora, ricorrendo anche direttamente alla medesima formola cardinale, ho cercato di stabilire le primordiali verità della geometria solida.

Quelli che leggeranno quest'opera vedranno che non solamente io non ho trascurato alcuno de' teoremi riportati nelle opere geometriche più stimate; ma sono anche giunto a de'nuovi teoremi de'quali ho indicato l'uso (*a*); e una nuova formola del Franchini vedesi essere una conseguenza del primo di essi (pag. 79). Siccome pure varie formole speciali del Legendre sono divenute una conseguenza di semplici svolgimenti della mia formola cardinale (*b*). Ho dedotto pure della mia formola fondamentale delle nuove relazioni (per quanto è a mia conoscenza) intorno a'parallelogrammi (*c*). Ho fatto dipendere tutta la teorica delle parallele dal principio che due rette sono parallele quando sono entrambe perpendicolari ad un'altra (*d*), e non solo ho mostrato come la teorica delle parallele può discendere facilmente dalla nuova formola cardinale (*e*); ma ho voluto pure far uso del comune linguaggio geometrico (*f*). Un'analisi de' triangoli poggianti sulla stessa base ci ha dato il mezzo di generalizzare il teorema 21 del 1° Libro degli Elementi di Euclide (*g*).

(*a*) Pag. 79 (2) e (*); pag. 124, 125, 126.
(*b*) Pag. 77 e 78.
(*c*) Pag. 40 e 41 n° 49; pag. 53 da riga 11; n° 59; pag. 53 a 56.
(*d*) N° 46 pag. 36 e 37.
(*e*) Pag. 39 (*).
(*f*) N° 47 pag. 37, 38 e 39.
(*g*) Pag. 50 e 51 n° 57.

L'equazione fondamentale mi ha data una nuova e generalissima analisi del tetragono iscrittibile nel cerchio (*a*), della quale fanno parte due teoremi dimostrati dal Legendre (*b*), il primo de'quali è il celebre e noto teorema di Tolomeo. Precedono alla iscrizione e alla circoscrizione de'poligoni regolari nel cerchio alcuni teoremi sul cerchio iscritto e circoscritto al triangolo, l'analisi del tetragono iscritto nel cerchio, e quella di un cerchio circoscritto o iscritto ad un poligono regolare (*c*). Segue la teoria della iscrizione e circoscrizione de'poligoni regolari nel cerchio (*d*), la quale dipende da una sola equazione (*e*) determinata colla nostra equazione cardinale: e da questa stessa equazione ho fatto dipendere il teorema che i poligoni iscritti e circoscritti hanno per limite il cerchio, crescendo i primi e diminuendo i secondi come cresce il numero de' lati (*f*); della quale considerazione mi sono servito per indicare il modo da determinare il rapporto della circonferenza al diametro (*g*). E si noti che in queste ricerche mi sono sempre tenuto fra gli strettissimi limiti degli elementi, poichè, avendo supposto (*h*) negli allievi la cognizione della sola parte elementare dell'algebra, non poteva ricorrere alle serie de'seni, de'coseni o della tangente in funzione dell'arco e reciprocamente.

Dopo di aver trasformata la equazione cardinale fra'cinque elementi del triangolo sferico (*i*), ho da questa fatti discendere con uno svolgimento continuo tutt'i teoremi della

(*a*) Pag. 117 n.° 137 e pag. 126.
(*b*) Nella prop. 33 del Libro III e nello Scolio alla medesima.
(*c*) Da pag. 111 n.° 126 a pag. 128.
(*d*) Da pag. 128 a pag. 132.
(*e*) Equazione (II) pag. 129.
(*f*) Da pag. 134 a 135.
(*g*) Pag. 136 e 137.
(*h*) Nota (*a*) pag. 1.
(*i*) Pag. 158 (*F*).

Trigonometria e Geometria Sferica e molti teoremi della Geometria Solida (*a*). In tal modo ho data una nuova dimostrazione delle Analogie di Nepero (*b*), tirandole dalla formola fondamentale de' triangoli sferici.

In riguardo alla quadratura delle superficie piane (*c*) io non poteva far uso direttamente dalla formola cardinale il cui scopo è quello di determinare de' rapporti fra' lati e gli angoli de' triangoli: ma mi sono servito di questa tutte le volte che bisognava determinare qualcheduno de' cennati rapporti; poichè si conosce che per le quadrature e cubature si richiedono de' metodi sommatorii. Considerando però i parallelogrammi come certe funzioni semplicissime delle loro basi e delle loro altezze, diversamente da quello che ha fatto il Legendre nelle sue note, ho ottenuta la formola della sua superficie (*d*), e quella del triangolo (*e*).

In riguardo a' poligoni ho dimostrato in qual modo potevansi quadrare (1): e dippiù ho trasformata la superficie di un poligono nel quadrato di un suo lato moltiplicato per un coefficiente costante, determinato quando è dato il poligono (2); il quale coefficiente essendosi dimostrato identico ne' poligoni simili (3) n'è risultato il rapporto della superficie di questi. Il Legendre aveva data una formola senza dimostrazione del triangolo rettilineo in funzione di due angoli di esso e della differenza de' quadrati de' lati ad essi opposti, che io ho dedotta dalla mia equazione fondamenta-

(*a*) Da pag. 158 in avanti.
(*b*) Pag. 189 n.° 53 a pag. 183.
(*c*) Da pag. 100 n.° 103 a pag. 116.
(*d*) 102, 103, 104 n. 109, 110, 111,
(*e*) Pag. 104 (*).
(1) Pag. 106 n. 115.
(2) Pag. 106 n. 116.
(3) Pag. 107 e 108.

le (1): ed ho di più riportate le diverse formole della superficie del triangolo secondo i dati di esso (2).

La prima parte termina col problema trigonometrico, secondo le varie combinazioni di tre dati pel triangolo obbliquangolo e di due pel triangolo rettangolo: ed ho benanche soggiunto 24 problemi su' triangoli e tetragoni. Termina la prima parte colla ricerca delle tre radici dell'equazione di terzo grado del caso irreducibile per mezzo della trigonometria.

Mi resta a dir qualche cosa sull'analisi delle quantità e de' rapporti che sogliono considerarsi nella Geometria solida. Sul principio aveva concepito il disegno di analizzare il tetraedro come elemento nel quale possono decomporsi i poliedri, applicando la mia equazione fondamentale a' quattro triangoli che lo terminano. Infatti, chiamando a, b, c i lati di un triangolo; a, l, l'; b, l, l''; c, l', l'' i rispettivi lati degli altri tre triangoli, avrei avuto le seguenti dodici equazioni, tre da ogni triangolo

$$a = b\cos(a, b) + c.\cos(a, c);\quad b = a\cos(b, a) + c.\cos(b, c);$$
$$c = a\cos(c, a) + b\cos(c, b)$$
$$a = l\cos(a, l) + l'\cos(a, l');\quad l = a\cos(l, a) + l'\cos(l, l');$$
$$l' = a\cos(l', a) + l\cos(l', l)$$
$$b = l\cos(b, l) + l''\cos(b, l'');\quad l = b\cos(l, b) + l''\cos(l, l'');$$
$$l'' = b\cos(l'', b) + l\cos(l'', l)$$
$$c = l'\cos(c, l') + l''\cos(c, l'');\quad l' = c.\cos(l', c) + l''\cos(l', l'');$$
$$l'' = c\cos(l'', c) + l'\cos(l'', l');$$

le quali, per l'eliminazione di a fra (1) e (4); di b fra (2) e (7) ec., si sarebbero ridotte a sei equazioni.

(1) Pag. 111 (*).
(2) Pag. 110.

Ciò posto supponendo abbassata una perpendicolare P dal vertice della piramide opposto al triangolo (a, b, c) sul piano di questo, e del piede della predetta perpendicolare supponendo tirate le perpendicolari p, p', p' rispettivamente sopra a, b, c, e supponendo congiunto il vertice della piramide co'piedi p, p', p'' delle precedenti tre perpendicolari, le tre congiungenti ρ, ρ', ρ'' sarebbero risultate perpendicolari ad a, b, c (63): e sarebbesi così avuto

angolo (p, ρ) = angolo diedro de' piani (a, b, c), (a, l, l');
angolo (p', ρ') = angolo diedro de' piani (a, b, c), (b, l', l'');
angolo (p'', ρ'') = angolo diedro de' piani (a, b, c), (c, l', l'').

$$\text{Epperò } \rho = l\,\text{sen}(l, a) = l'\,\text{sen}(l', a) = \frac{p}{\cos(\rho, p)} = \frac{P}{\text{sen}(\rho, p)};$$

e parimente sarebbesi avuto

$$\rho' = l\,\text{sen}(l, b) = l''\,\text{sen}(l'', b) = \frac{p'}{\cos(\rho', p')} = \frac{P}{\text{sen}(\rho', p')} \text{ ec.}$$

Continuando quest'analisi si sarebbero avute delle relazioni onde esprimere analiticamente tutt'i determinanti di ogni maniera del tetraedro per mezzo de'lati di esso, o per mezzo de'tre lati che si uniscono ad uno de'suoi angoli e degli angoli piani che i medesimi fanno a due a due, ec.; lo che sarebbe tornato tanto più utile all'analisi di un solido che aveva tirato a se l'attenzione di Lagrangia e di altri analisti, in quantochè quest'analisi sarebbe stata un'applicazione di quella stessa formola da cui era uscita tutta la geometria e la trigonometria.

Ma per più ragioni io ho abbandonata questa via; sulle prime perchè io mi era prefisso di evitare le lunghe calcolazioni; poichè destinava questa opera a tutte le professioni e sopra tutto alla massa di quelli che si applicano alla tecnologia. Or questa nuova analisi del tetraedro, comunque for-

mata da operazioni elementari di algebra, pure doveva divenire lunga e nojosa, sopratutto a quelli che non hanno acquistato una grande speditezza nel calcolo algebraico. In secondo luogo, dovendo passare dal tetraedro a'poliedri, più lunghe assai sarebbero divenute le calcolazioni. Finalmente per aver il volume del tetraedro con una formola dipendente da'determinanti di essi, avrei dovuto partire dalla espressione del medesimo che, non potendo io far uso di metodi sommatorii analitici, doveva ritrarre da qualche ragionamento geometrico indipendente dall'analisi per me adottata.

Epperò, avendo io fatto uso esclusivamente della mia formola per determinare i teoremi della geometria piana e della trigonometria, ho creduto meglio ritrarre i teoremi appartenenti alla geometria solida dalle verità dimostrate, e non già a priori dalla stessa formola fondamentale come ho fatto pel resto di quest'opera. E facendone un'avvertenza alla pag. 197 n.° 63 ho mostrato con un esempio come avrei potuto seguire anche l'analisi diretta, sebbene per un cammino più lungo; poichè in questo numero mi sono servito della mia formola fondamentale per dimostrare direttamente un teorema di geometria solida. In riguardo al volume della piramide, ho determinato la piramide avente il suo vertice al centro del cubo, e per base il quadrato che lo termina; la quale, essendo la sesta parte del volume del cubo, ha potuto determinarsi agevolmente.

Da ultimo ho soggiunto una breve analisi del tetraedro (*a*), seguendo la idea di Lagrangia (*b*); ma modificandone talune calcolazioni, onde giungere agli stessi risultamenti per una via più breve.

(*a*) Da pag. 125 n.° 102 fino al termine dell'opera.

(*b*) Memoria concernente la soluzione di alcuni problemi relativi a' Triangoli Sferici inserita nel Tom. I del Giornale della Scuola Politecnica.

Qualunque sia il merito di questo mio lavoro, niuno potrà negargli quello della brevità e della facilità con cui procede l'analisi, facilità che lo rende atto ad ogni ingegno il quale abbia studiati i primi rudimenti dell'algebra fino all'equazioni di secondo grado.

Digitized by Google

Digitized by Google

NUOVO SISTEMA

DI STUDI GEOMETRICI

ANALITICAMENTE DEDOTTI DALLO SVOLGIMENTO SUCCESSIVO DI UNA SOLA EQUAZIONE, AD OGGETTO DI RENDERE L'INSEGNAMENTO MATEMATICO PIÙ GENERALE E PIÙ ACCONCIO ALL'ORDINAMENTO DELLE ALTRE SCIENZE E A' BISOGNI DELL'ODIERNA CIVILTA'.

In tenui Labor.

PARTE PRIMA

GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA PIANA (*a*)

Prenozioni o linguaggio geometrico.

1. PRENDIAMO un libro; noi potremo scorrere sopra di esso lungo tre direzioni rettilinee differenti, cioè la sua *lunghezza*, la sua *larghezza* e la sua *profondità* o *altezza*. Queste tre direzioni sono le tre *dimensioni de' corpi*. Misurando una sola di queste dimensioni avremo la *linea*, nella quale consideriamo la sola *lunghezza*. E se prendiamo in disamina due dimensioni nel tempo stesso, avremo la nozione della *superficie*. Se poi consideriamo insieme le tre dimensioni, avremo l'idea del *volume* de' corpi.

(*a*) Questa opera suppone in chi dee studiarla la cognizione dell'aritmetica e dell'algebra elementare.

Chiamiamo *punti* i termini delle linee. Epperò l'intersezione di due linee non può esser che un punto il quale è uno de' termini comuni all'una e all'altra. Due superficie non possono segarsi che lungo una linea, la quale chiamasi *traccia* di una di esse sull'altra; e questa è uno de' termini comuni di amendue: due corpi, segandosi, non possono aver di comune che una superficie.

Se tra due punti si tirino varie linee, la più breve dicesi *linea retta* o semplicemente *retta*. Tutte le altre hanno nome di *curve*. Adunque la retta *giace egualmente* tra' suoi estremi.

Se una retta può adattarsi su di una superficie in ogni senso, questa superficie dirassi *superficie piana* o *piano*. Adunque la superficie piana giace egualmente tra le sue rette estreme. Ogni altra superficie diversa dal piano, costituita tra gli stessi limiti, dirassi *superficie curva*.

L'intersezione di due superficie curve qualunque dicesi *curva a doppia curvatura* (*a*), perchè partecipa della curvatura di entrambe.

Quando è dato al geometra di esibire geometricamente una retta eguale in lunghezza ad una curva, questa dirassi *rettificabile*.

Scelta una retta per unità di misura, e divisa in 10, 100 ec. parti eguali, tutte le rette e le curve *rettificabili*, riferite all'unità lineare, diverranno *numeri*.

Si vedrà nelle alte matematiche che vi sono delle curve perfettamente rettificabili, e delle altre tali che, sebbene non possa esibirsi una retta eguale perfettamente a una data curva, pure si può giungere numericamente ad un'approssimazione che in tutte le applicazioni non differisce sensibilmente dal vero.

L'unità lineare del sistema metrico napoletano è il palmo, settemillesima parte del miglio geografico: ed esso riferito al metro è

(*a*) Per aver l'idea della curva a doppia curvatura, prendasi una palla di sego o di cera, e un calamaio di ottone, e questo premasi contro la detta palla, finchè vi faccia una sensibile impressione. Adattisi un ferro filato lungo il termine di questa impressione, questo filo indicherà la forma di una curva a doppia curvatura.

Un filo di ferro disposto a spira sarà anche una curva a doppia curvatura. Una curva a doppia curvatura non potrà mai adattarsi su di un piano, come una curva a semplice curvatura.

metri 0,264550; siccome il metro è palmi 3,78: l'unità geografica è il miglio geografico.

2. L'*inclinazione scambievole* di due linee che s'incontrano dicesi *angolo*. L'angolo dunque consiste nel maggiore o minore allontanamento delle due linee che s'inclinano, e queste diconsi *lati* dell'angolo. Se le linee formanti l'angolo sono rette, l'angolo dirassi *rettilineo*, se curve, *curvilineo*, e *mistilineo* se una è retta e l'altra curva (Fig. 1). Il punto, ove le rette s'incontrano, dicesi *vertice* dell'angolo. L'angolo si nomina con tre lettere, ponendo in mezzo la lettera al vertice, come l'angolo *ABC*, o pure si dinota colla sola lettera al vertice, come l'angolo in *B*.

Quando le linee s'incontrano in modo che una di esse, considerata per rispetto all'altra, non inclina nè più da una banda nè dall'altra, l'angolo ch'esse formano dicesi *retto* e le rette una *perpendicolare* o *normale* all'altra. Così *AE* (Fig. 2) è perpendicolare a *CD* se non è più inclinata o verso *C* o verso *D*; e *CD* ad *AE*.

Segue da ciò che gli angoli retti sono eguali, come *ABC*, *ABD*, *EBC*, *EBD*, *CBA*, *CBE* ec.: epperò che in un punto *D* non possono esistere che soli quattro angoli retti.

Se poi una retta *LB* inclina più da una banda che dall'altra della retta *CD*, gli angoli *LBC*, *LBD* diconsi *obbliqui*, e propriamente *LBC* maggiore del retto *ABC* dirassi *ottuso* e *LBD* minore del retto *ABD*, *acuto*.

È chiaro che da un punto *B* di una retta *CD* possono tirarsi alla medesima infinite obblique *LL'*, *MM'*, ma una sola perpendicolare *AE*.

L'angolo retto si considera come l'*unità angolare*; e allora un angolo qualunque diviso per l'angolo retto diverrà un numero.

Due angoli possono sommarsi e sottrarsi: così l'angolo

$$LBC = ABC + ABL, \text{ e } ABL = LBC - ABC.$$

Se la somma di due angoli è eguale ad un retto, tali angoli si diranno uno *complemento* dell'altro; e se due angoli sommati danno due retti, si diranno l'uno *supplemento* dell'altro.

3. Due linee che serbano sempre la stessa distanza tra loro, comunque si prolunghino, diconsi *parallele*.

Siano (Fig. 2) FF', CD amendue perpendicolari ad AB: supponiamo $AF=AF'$, e che da F, F' sieno innalzate fra esse le perpendicolari FC, $F'D$ sulla FF'. Supponiamo che si pieghi la figura $FCDF'$ lungo AB in modo che AF' cada su di AF e'l punto F' sul punto F; la $F'D$ cadrà sulla FC perchè egualmente inclinate ad FF': e dimostrando lo stesso per le altre perpendicolari tirate ad FF' tra FF' e CD, ad eguale distanza da AB, ne segue, 1° che le rette FF', CD avranno sempre la stessa distanza fra loro e saranno perciò parallele, 2° che le perpendicolari fra due rette parallele saranno eguali fra loro; epperò una di esse misurerà la distanza fra due parallele.

4. Una superficie racchiusa da una o più linee dicesi con nome generale *figura* o *poligono*. Fra le figure piane le più degne di considerazione sono, il *triangolo*, il *trapezio*, il *parallelogrammo* o meglio *parallineo*, e il *cerchio*.

Il triangolo rettilineo è una superficie piana racchiusa da tre rette ossia *lati*. Se i lati sono tutti tre eguali, il triangolo dirassi *equilatero*; se due solamente sono eguali, si dirà *isoscele*, e chiamerassi *scaleno* se i tre lati differiscono l'uno dall'altro.

Se un sol angolo è *retto* il triangolo sarà *rettangolo*: se un sol angolo è ottuso si dirà *ottusangolo*, e dirassi *acutangolo* se i tre angoli sono acuti. Adunque in ogni triangolo si distinguono sette elementi o parti di esso, i tre lati, i tre angoli e la superficie triangolare. Uno de'lati del triangolo sul quale esso si considera come poggiato suol dirsi *base* e la perpendicolare abbassata sulla base dal vertice dell'angolo opposto dicesi *altezza* del triangolo.

Una figura racchiusa da quattro linee dicesi particolarmente *quadrilatero*; e se due soli lati opposti di questo sono paralleli, lo diremo *trapezio*.

Un poligono avrà nome particolare di *pentagono*, di *esagono*... *decagono*... *dodecagono* ec. s'è rispettivamente racchiuso da cinque sei... dieci... dodici lati. L'insieme de'lati di un poligono chiamasi *perimetro*.

Quando un poligono ha eguali tutt'i lati e tutti gli angoli dicesi *regolare*.

Tra'quadrilateri distinguesi il *parallineo* o *parallelogrammo*,

per lo quale intendono i geometri un quadrilatero i cui lati opposti sono paralleli. Vi sono quattro specie di parallinei, il *Quadrato* ch'è *rettangolo* ed *equilatero*, ossia ha i lati eguali e gli angoli retti; il *Rettangolo* ch'è *equiangolo* e non *equilatero*, ossia che ha gli angoli *retti* e non già i lati *eguali*; il *Rombo* ch'è equilatero e non rettangolo, ossia che ha i lati *eguali* e non gli angoli *retti*; il *Romboide* che non è nè *equilatero* nè *rettangolo*. La retta che unisce due angoli opposti di un parallineo dicesi *diagonale* o *diametro*. Nel rombo e nel romboide, la perpendicolare che si abbassa da uno de'suoi angoli sul lato opposto detto *base* chiamasi *altezza della figura*.

Il quadrato dell'unità lineare è l'unità di superficie; e allora qualunque superficie riferita all'unità quadratica diviene un numero.

L'unità agraria in Napoli è il moggio ch'è un quadrato il cui lato contiene 100 palmi: epperò è di 10 mila palmi quadrati.

5. Il cerchio è una figura piana racchiusa da una curva detta *circonferenza*, i cui punti sono egualmente distanti da un altro punto preso nel suo mezzo, detto *centro*. Quelle distanze eguali diconsi *raggi*. La retta che da un punto della circonferenza si tira per lo centro al punto opposto della medesima dicesi *diametro*, e divide la circonferenza in due semicerchi: epperò il raggio è un semidiametro. Una parte qualunque della circonferenza dicesi *arco*, e la retta che ne unisce gli estremi, *corda*.

La superficie racchiusa tra un arco e la sua corda chiamasi *porzione di cerchio* o *segmento circolare*. Quella parte della superficie circolare racchiusa tra due raggi e l'arco compreso fra questi, dicesi *settore circolare*.

La circonferenza del cerchio si considera da' geometri divisa in 360 parti eguali dette *gradi*; e ogni grado in 60 minuti primi: ogni minuto primo in 60 secondi ec. La notazione di un arco, p. e., di 45 gradi, 37 primi e 43 secondi è la seguente 45°, $37'$, $43''$.

I geometri moderni verso il cadere del secolo XVIII divisero la circonferenza in 400 gradi; ogni grado in 100 primi; ogni primo in 100 secondi ec.; lo che costituisce la divisione decimale della circonferenza di cui trovasi fatto uso nella maggior parte delle

opere pubblicate dalla fine del secolo trascorso fin oggi. In questi elementi noi adotteremo la divisione antica.

La quarta parte della circonferenza dicesi *quadrante*, il quale è stato adottato da'geometri per unità degli archi. E allora un arco qualunque riferito al quadrante diviene un numero. Così l'arco di 180° è rappresentato da 2; l'arco di 30° da $\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$; l'arco di 10°, 5′ da $\frac{10^\circ, 5'}{90}=\frac{605}{5400}$ (riducendo tutto a minuti primi). Un angolo che ha il suo vertice al centro di un cerchio dicesi *angolo al centro*, siccome *angolo alla circonferenza* quello il cui vertice è ad un punto qualunque della circonferenza. L'angolo *DOB* è al centro, e *DLB*, *DLM* ec. (Fig. 3) sono angoli alla circonferenza.

Se una retta *ATC* incontra la circonferenza circolare in un punto *T*, dicesi *tangente* del cerchio, e il punto *T* dicesi *punto di contatto*. E se dal punto di contatto *T* si tiri una corda *TB*; questa dividerà il cerchio in due segmenti *TPB*, *TDLB*, i quali rispetto alla tangente *TC*, *TA* diconsi *alterni* rispettivamente.

Se *LOT* è un diametro, ciascheduno degli angoli *LNT*, *LBT*, *LmT* ec. dirassi fatto o iscritto nel semicerchio, siccome l'angolo *BDL*, *BTL* ec. si dirà fatto nel *segmento BTDL maggiore* del semicerchio, e l'angolo *BML* avrà nome di angolo iscritto nel *segmento BLM minore* del semicerchio.

Se un poligono avrà tutti i suoi lati tangenti alla circonferenza di un cerchio, si dirà poligono *circoscritto* al cerchio, e questo *iscritto* nel poligono. E se i vertici degli angoli di un poligono saranno sulla circonferenza del cerchio, il poligono si dirà *iscritto* nel cerchio, e questo *circoscritto* al poligono.

Nel poligono regolare iscritto in un cerchio, la perpendicolare abbassata dal centro su di uno de'lati dicesi *apotema*, e la differenza del raggio e dell'apotema, *saetta*.

6. Se concepiscasi una retta *BA* (Fig. 4) fissa al punto *B*, e coll'altro *A* girare intorno alla circonferenza *AKCRA*, finchè ritorna nel punto *A*, essa prenderà nel cerchio tutte le posizioni, *BC′*, *BK*, *BC*... le quali faranno colla *BA* gli angoli *ABC′*, *ABK*, *ABC*...; e poichè

questi angoli crescono come crescono gli archi AC', AK, AC... frapposti fra'suoi lati, perciò i geometri si sono serviti degli archi per misurare gli angoli, comechè gli archi e gli angoli sieno delle grandezze eterogenee fra loro. Così se l'arco AC', per es., comprende 40° ossia 40 delle 360 o 400 parti eguali nelle quali si è supposta divisa la circonferenza, di altrettanti gradi essi stimano l'angolo ABC': epperò essi dicono che l'angolo retto sia di 90° o 100gr. Ma questo linguaggio suppone una tacita proporzione da essi instituita: così quando dicono ch'essendo AE di 40°, di altrettanti gradi è l'angolo ABE, intendono dire in effetto che l'angolo ABE ha tante parti di tutti gli angoli fatti in B supposti divisi pure in 360 o 400 angoletti eguali, quante parti dell'intera circonferenza divisa nello stesso numero di archetti eguali contiene l'arco AE. Epperò quella eterogenità scomparisce, poichè nel riferire quelle due quantità eterogenee, gli angoli e gli archi corrispondenti, alle rispettive loro unità, si considera la sola identità de' numeri da' quali quelle due ragioni sono espresse. Adunque diremo che *la misura di un angolo è il numero de' gradi dell'arco descritto tra' suoi lati, prendendo il suo vertice per centro e un raggio qualunque.*

7. Essendo arbitrario il raggio a cui può riferirsi un dato arco, ne segue che un arco qualunque a riferito successivamente a' raggi r, r', r''... debba esprimersi per via del rapporto costante $\frac{a}{r}$. Poichè supponiamo che la lunghezza dell'arco a riferito al raggio r divenga a' rispetto al raggio r'; se potesse essere $\frac{a}{r}$ differente da $\frac{a'}{r'}$, una stessa quantità potrebbe avere diverse espressioni; lo che è impossibile. Adunque uno stesso arco a riferito a' raggi r, r', r''... darà $\frac{a}{r}=\frac{a'}{r'}=\frac{a''}{r''}$. Epperò gli archi che misurano uno stesso angolo sono proporzionali a' raggi a' quali essi si riferiscono.

8. Siano (Fig. 4) A, A' due angoli differenti che si dispongano come

$ABC = A$, $ABE = A'$ e siano situati al centro B di uno stesso cerchio o di cerchi uguali; sarà $\frac{A}{90} = \frac{a}{quadrante}$, $\frac{A'}{90} = \frac{a'}{quadrante}$; epperò $A : A' = a : a'$. Cioè in cerchi eguali gli angoli sono come gli archi su'quali poggiano (*a*).

Quindi se pel centro B (Fig. 4) s'intendano tirati due diametri perpendicolari tra loro AP, RK, i quattro angoli ABR, RBP, PBK, KBA come i quattro archi AR, RP, PK, KA saranno rispettivamente eguali fra loro; gli angoli, retti; e gli archi, quadranti.

E poichè tutta la circonferenza si considera divisa in 360° o 400$^{gr.}$, secondo la divisione antica o moderna, ne segue che il quadrante e però l'angolo retto dicesi di 90° o di 100$^{gr.}$ Per questa ragione la divisione moderna dicesi *centigrada*, da che l'unità angolare ossia l'angolo retto è diviso in 100 gradi.

Epperò sarà complemento $a = 90 - a$; compl. $(90 + a) = -a$:
Supplemento $a = 180 - a$; suppl. $(90 + a) = 90 - a$:
Suppl. $(a - 90) = 270 - a$.

Nel sistema centigrado i gradi e i minuti si possono scrivere alla maniera di decimali; poichè i gradi sono parti centesime del quadrante ossia dell'unità angolare, i minuti primi sono parti centesime del grado epperò 10 millesime del quadrante, e così procedendo innanzi. Sicchè indicando il quadrante con q posto a modo di esponente sopra 0, 1, 2 ec., se si dovesse, per es., scrivere 73$^{gr.}$, 27$'$, 9$''$, si scriverà 0^q, 732709; e un arco di 135$^{gr.}$ 9$'$, 71$''$, si scriverà 1^q, 350971.

9. Una retta dicesi perpendicolare ad un piano allorchè è perpendicolare a tutte le rette che passano per lo punto in cui detta linea incontra il piano. Questo punto dicesi *piede* della perpendicolare.

Una retta dicesi parallela ad un piano quando non può incontrarlo, comunque l'una e l'altro si prolunghino.

(*a*) La dimostrazione per gli archi incommensurabili potrà vedersi in tutte le geometrie elementari moderne.

L'angolo che fanno due piani dicesi *angolo diedro*, e la retta nella quale i detti piani s'incontrano dicesi *canto* o *spigolo* o *lato* o *costola*.

Lo spazio angolare indeterminato compreso fra più di due piani dicesi *angolo solido*.

Un corpo terminato da più facce piane dicesi in generale *poliedro*, e specialmente poi *tetraedro*... *esaedro*... *dodecaedro*... *icosaedro* ec. se è rispettivamente terminato da quattro... sei... dodici... venti facce.

Se le facce che terminano un corpo sono tutti poligoni regolari, cioè o triangoli equilateri, o quadrati, o pentagoni regolari, il corpo dirassi poliedro regolare. E vedremo che cinque soli possono essere i poliedri regolari, il *tetraedro regolare* terminato da quattro triangoli equilateri, l'*ottaedro regolare* terminato da otto triangoli equilateri, l'*icosaedro regolare* terminato da venti triangoli equilateri, l'*esaedro regolare* ossia il cubo terminato da sei quadrati, e'l *dodecaedro regolare* terminato da dodici pentagoni regolari.

Il *tetraedro* è il poliedro più semplice, poichè tre piani che s'incontrano lasciano sempre un vôto.

La *piramide* è un corpo che ha un poligono qualunque per base ed è terminato da triangoli laterali che hanno per base i lati di questo poligono e i cui angoli al vertice si uniscono in un punto detto *vertice* della piramide. E dicesi *piramide triangolare* o *tetraedro*, *piramide quadrangolare* ec. secondochè la sua base è un triangolo, un quadrilatero ec. L'altezza della piramide è la perpendicolare che cade dal suo vertice sulla base.

Il *prisma* è un corpo le cui basi superiore e inferiore sono due poligoni qualunque eguali e paralleli, e lateralmente è racchiuso da'parallelogrammi i cui limiti superiore e inferiore sono i lati delle due predette basi. Se le basi sono triangoli, il *prisma* dicesi *triangolare*. La superficie intera del prisma è la somma delle basi e de' parallelogrammi laterali; e la superficie convessa è la sola somma de'parallelogrammi laterali. L'altezza è la perpendicolare che da un punto della base superiore scende sulla inferiore, e quando essa è lo stesso lato, il prisma dicesi *retto*.

Il prisma che ha per base un parallelogrammo dicesi *parallelepipedo*, il quale sarà rettangolo quando tutte le sei facce saranno rettangoli, e quadrati come il *cubo*. La retta che unisce i vertici di due angoli solidi non adjacenti di un poliedro dicesi *diagonale*.

10. La sfera è un corpo terminato da una superficie curva i cui punti sono tutti egualmente distanti da un punto interno detto *centro*. Ciascheduna di queste distanze dicesi *raggio*, e chiamasi *diametro* o *asse* una retta che passa pel centro e termina da ambe le parti alla superficie della sfera.

È chiaro che i cerchi i quali passano per lo centro sono *cerchi massimi* i cui raggi sono eguali al raggio della sfera, e che gli altri cerchi che non passano per lo centro sono *cerchi minori*, i quali variano di raggio come più o meno si allontanano dal centro della sfera.

Un punto della superficie sferica equidistante per un arco di cerchio massimo da tutt' i punti di una circonferenza dicesi *polo* di questa.

Dicesi *triangolo sferico* una parte della superficie sferica racchiusa da tre archi di cerchio massimo; e negli stessi casi del triangolo rettilineo il triangolo sferico può essere *equilatero*, *isoscele*, *scaleno*, *rettangolo* e *obliquangolo*.

Una parte della superficie sferica racchiusa da più di tre archi di cerchio massimo dicesi *poligono sferico*.

Il *fuso sferico* è la porzione della superficie sferica compresa fra due cerchi massimi che si segano in un diametro comune.

Chiamasi *cuneo* o *unghia sferica* la parte della sfera a cui il fuso serve di base.

Chiamasi *piramide sferica* la parte della sfera che ha il suo vertice al centro, e la sua base è un poligono sferico.

Dicesi *zona sferica* la parte della superficie sferica compresa tra due cerchi paralleli, o tra un polo e un suo cerchio.

Il segmento sferico è la parte della sfera terminata da un cerchio che gli serve di base e da una zona, o pure che è terminata da due cerchi paralleli e dalla zona tra essi racchiusa. L'altezza della zona e del segmento è la distanza de' due piani paralleli, uno de' quali può esser rimpiazzato dal polo dell'altro.

11. Dicesi *cilindro retto* il volume generato dalla rivoluzione di

un rettangolo intorno ad uno de' suoi lati. Questo lato dicesi asse del cilindro ed è la sua altezza. La superficie intera si compone dalla superficie laterale e da' due cerchi superiore e inferiore. E la sola superficie laterale dicesi *superficie convessa.*

Dicesi *cono retto* il volume generato dalla rivoluzione di un triangolo rettangolo intorno ad uno de' suoi catetti. Questo catetto è l'asse del *cono*, ed è la sua altezza: l'altro catetto genera il cerchio della base e'l vertice del triangolo dicesi *vertice* o *centro* del cono.

Se consideriamo una retta obbliqua al piano di un cerchio, la quale mentr'è fissa in uno de' suoi estremi, scorre coll'altro lungo la circonferenza di questo cerchio, essa genererà il cono obbliquo, in cui l'asse, ossia la retta che passa per lo vertice del cono e il centro del cerchio, è diverso dall'altezza ch'è la perpendicolare abbassata dal predetto vertice sul piano del cerchio. Se la stessa retta si muova parallelamente a se stessa lungo la circonferenza, genererà il cilindro obbliquo. La superficie laterale insieme col cerchio della base forma la superficie intera, e la sola superficie laterale forma la superficie semplice del cono.

12. Le lettere usate dagli analisti, come simboli delle quantità, sono o costanti o variabili. Le costanti hanno un valore determinato, anche che questo fosse ignoto, come sono le radici di un'equazione determinata, primacchè sia essa risoluta. Le quantità variabili poi possono ricevere un numero indefinito di valori compresi o no tra certi limiti. Così la lunghezza di 100 palmi, per es., è una quantità costante; ma volendo prendere lungo di essa una grandezza qualunque maggiore di 0 e minore di 100, questa grandezza sarà variabile tra' limiti di zero e di 100 palmi. Le costanti sogliono dinotarsi colle prime lettere dell'alfabeto, e le variabili colle ultime.

Se tra le variabili x, y e le costanti a, b esiste l'equazione $x+a=y+b$, dovrà essere $x=y$ e $a=b$: nè può considerarsi questa come un'equazione algebraica. Infatti posta la detta equazione sotto la forma $y-x+b-a=0$, per la natura delle quantità variabili possiamo supporre $y=0$, $x=0$; onde risulterà $b-a=0$ epperò $b=a$; per cui la data equazione diverrà $x+a=y+a$, cioè $x=y$ (*a*).

(*a*) Facilmente si comprenderà che nell'ipotesi di x, y variabili, l'equa-

Sia $ay=bx$ e siano a, b costanti, x, y variabili; si avrà $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$. Or due quantità possono sempre variare e conservare intanto lo stesso rapporto; poichè la ragione $\frac{b}{a}=\frac{nb}{na}$ ove n può ricevere qualsiasi valore, adunque l'equazione $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$ regge nell' ipotesi presente, quantunque y e x siano variabili e a, b costanti.

Se si ha un'equazione della forma $\frac{b}{a}x=\frac{b'}{a'}y$ tra le variabili x, y, e le costanti a, b, a', b'; questa equazione non può reggere altrimenti che facendo $x=y$, $\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$. Infatti $\frac{b}{a}$, $\frac{b'}{a'}$ sono due ragioni le quali possono rimanere identiche per un numero indefinito di valori assoluti delle costanti a, b, a', b'. E di più facendo $x=y$, queste quantità non perdono la natura della variabilità, potendo esse avere un valore qualunque sotto la sola condizione della loro identità.

13. Una variabile dicesi funzione di un'altra quando è espressa analiticamente per mezzo di questa e delle costanti; in modochè, come questa varia, così varia la funzione. Così nell'equazioni $y=a+x$; $y=ax$; $y=\frac{a}{x}$ ec. la y dicesi funzione della variabile x. Così noi diciamo che lo spazio corso da un mobile animato sempre dalla stessa velocità, è funzione del tempo, perchè varia come varia il tempo. Così nell'orologio la sfera de'minuti in due ore descriverà due volte la circonferenza dell'orologio: epperò, essendo la stessa la velocità della sfera de'minuti, lo spazio descritto

zione $x+a=y+b$ non è algebraica. Infatti se potesse non essere $a=b$, suppongasi $a=b\pm\delta$, sarà $a-b=\pm\delta$, epperò l'equazione $y-x=a-b$ diverrà $y-x=\mp\delta$; lo chè ripugna generalmente colla natura delle quantità variabili enunciata quassù: adunque sarà $a=b$ epperò $x=y$.

dalla medesima è funzione del tempo, cioè dipende dal tempo. L'espressioni $y=fx$, $y=\varphi x$, $y=Fx$, $y=\Psi x$ ec. esprimono che la y è funzione della x; cioè che tra la variabile x e la funzione y vi è una relazione tale che questa varia come varia quella.

14. Sia ACB (Fig. 5 n.° 1) un angolo del triangolo ACB: suppongasi descritto col centro C vertice dell'angolo e col raggio CB, eguale ad uno de'suoi lati, l'arco BE fino all'incontro E coll'altro lato CA: quest'arco riferito al raggio CB misurerà l'angolo C. Di poi da B si supponga abbassata su di AC la perpendicolare BM: questa si dirà *seno* e la CM *coseno* dell'arco BE o dell'angolo BCA per rispetto al raggio CB. Per la stessa ragione la BM si dirà *seno* e la AM *coseno* dell'arco BD ossia dell'angolo BAC per rispetto al raggio AB. Adunque *il seno di un angolo C o dell'arco BE che lo misura è la perpendicolare BM abbassata da uno degli estremi B sul raggio CE che giugne all'altro estremo E del medesimo arco. E il coseno CM dello stesso arco BE è la parte del raggio CE compreso tra il centro C e'l piede del seno.* Se a indica un arco, l'espressioni *sen a, cos a* si leggeranno, seno di a, coseno di a.

15. Segue da ciò che se in un triangolo CBA si abbassi del vertice di un angolo B la perpendicolare BM sul lato opposto AC prolungato se bisogna (Fig. 5 n.° 2°), questa stessa sarà seno dell'angolo C (n.° 1° e n.° 2°) per rispetto al raggio BC; e sarà seno dell'angolo A per rispetto al raggio eguale al lato BA. Il segmento CM (n.° 1° e n.° 2°) poi adjacente a C sarà il coseno dello stesso angolo C per rispetto al raggio BC; e l'altro AM adjacente ad A sarà il coseno dell'angolo A per rispetto al raggio AB.

Dalla definizione del seno segue che come varia l'arco AE, AB... (Fig. 6) così varia pure il seno; che il minimo valore del seno, al punto A ove l'arco è zero, è anche zero; laddove il massimo valore del seno sarà CD o il raggio: onde sarà $\text{sen}\,0=0$, $\text{sen}\,90=r$, in cui r dinota il raggio.

E dalla definizione del coseno segue che questo è CA ossia r al punto A ove l'arco è zero: indi comincia a diminuire come cresce l'arco, essendo $\cos AE=Cm$; $\cos AB=Cn$, finchè divenuto l'arco un quadrante risulterà $\cos 90=0$. Adunque tra gli stessi limiti il

seno e'l coseno crescono e diminuiscono in ordine inverso cioè sen $0=0$ e cos $0=r$; sen $90=r$ e cos $90=0$.

Siano $Em=$ sen AE, $EI=$ sen ED: e poichè le due rette IC, Em sono ambe perpendicolari alla stessa AC, saranno parallele; e per la stessa ragione sarà Cm parallela ad EI, epperò $Em=CI$ (3); ossia sen $AE=$ cos ED; ma $ED=90^o-AE$; adunque generalmente sen $a=$ cos $(90-a)$. Per la stessa ragione sarà $Cm=IE$; ossia cos $AE=$ sen $(90-AE)$; cioè cos $a=$ sen $(90-a)$.

16. Se da un punto A (Fig. 6) di una circonferenza circolare si tiri il raggio AC sul quale si supponga elevata la perpendicolare AT indeterminata, questa sarà la *tangente geometrica* del cerchio. Se poi si tirino a volontà degli altri raggi CE, CB i quali si prolunghino fino all'incontro colla AT ne'punti P, T, le rette AP, AT... si diranno tangenti trigonometriche rispettivamente degli archi AE, AB... Sicchè *la tangente trigonometrica di un arco è la parte della tangente circolare tirata da un estremo del medesimo arco e limitata dal raggio tirato dall' altro estremo e prolungato fino all' incontro colla tangente.*

17. Le rette CP, CT prolungate fino alla tangente diconsi *seganti* degli stessi archi AE, AB rispettivamente. La segante e la tangente di un arco diconsi *cosegante* e *cotangente* rispettivamente dell'arco complemento: epperò sarà $DM=$ *cotangente* di AB; e CM *cosegante* di AB; cioè

$$\text{seg}\, a=\text{coseg}\,(90-a);\ \text{tang}\, a=\text{cot}\,(90-a);$$
$$\text{coseg}\, a=\text{seg}\,(90-a);\ \text{cot}\, a=\text{tang}\,(90-a).$$

Finalmente le rette Am, An, differenza tra il raggio e i coseni rispettivi degli archi AE, AB, diconsi *seni versi* de'medesimi archi.

18. Andiamo a dimostrare col solo ajuto dell'analisi che la forma analitica di una linea trigonometrica qualunque è $rf\varphi$, in cui r indica il raggio del cerchio, e $f\varphi$ è una funzione dell'arco φ a cui si riferisce detta linea trigonometrica. E ne daremo varie dimostrazioni.

1.ª Poichè i diversi archi AB, AE... (Fig. 6) di uno stesso cerchio hanno differenti seni Bn, Em..., differenti coseni Cn, Cm...,

differenti tangenti AT, AP..., differenti cotangenti, seganti, coseganti seni versi, ne segue che, come variano gli archi di uno stesso cerchio, così pure varieranno le loro linee trigonometriche. Epperò *le linee trigonometriche di differenti archi riferiti allo stesso raggio sono funzioni dell'arco.*

Sicchè notando con r il raggio del cerchio e con l una certa linea trigonometrica di un arco qualunque φ, sarà $l=f\varphi$: ma poichè l e φ sono quantità eterogenee, per ristabilire l'omogenità, si farà $\frac{l}{r}=f\varphi$; onde sarà $l=rf\varphi$. Epperò variando il solo raggio, con chiamarlo r', sarà $l'=r'f\varphi$, onde $l : l'=r : r'$.

2.ª Se col vertice C dell'angolo RCK (Fig. 6) si descriveranno con diversi raggi CA, CK... gli archi AE, KN... compresi tra'lati dello stesso angolo RCK, e si prenderanno i seni Em, NH..., i coseni Cm, CH..., le tangenti AP, KR... ec. ec., si osserverà che uno stesso angolo RCK ha differenti linee trigonometriche corrispondenti a'differenti raggi co'quali sono descritti gli svariati archi che misurano lo stesso angolo. Adunque varia il valore assoluto delle linee trigonometriche di uno stesso angolo come varia il raggio a cui si riferiscono gli archi che lo misurano; epperò ne segue *che i valori assoluti delle linee trigonometriche di uno stesso arco riferito a differenti raggi si possono generalmente considerare come funzioni de'raggi:* cioè $l=Fr$.

Vediamo come dee interpetrarsi questa equazione. Poichè l ed r sono quantità omogenee, cerchiamo di esprimere la forma della Fr. Questa o potrebbe essere $l=a+pr$, o $l=mr$, in cui p ed m sono de'cofficienti che da quì a poco impareremo a determinare. Sotto la prima forma $l=a+pr$, o a dipende da r o n'è indipendente. Non può essere a indipendente da r, perchè fatto $r=0$, risulterebbe $l=a$, e però l indipendente da r; lo che è assurdo, poichè quassù abbiamo detto essere $r=Fr$: d'altronde quando $r=0$ non esiste nè cerchio nè arco nè linea trigonometrica di sorta alcuna. Adunque anche che potesse reggere l'equazione $l=a+pr$, l'a dovrebbe dipendere da r, cioè dovrebbe essere $a=f'r=nr$. Allora l'equazione $l=a+mr$ diverrebbe $l=nr+pr=(n+p)r=mr$; ma da cioc-

chè quassù abbiamo detto si vede chiaramente che dovrà esser $a=0$, affinchè possa reggere la condizione di $l=0$ quando $r=0$. Adunque generalmente la forma di una linea trigonometrica appartenente ad uno stesso arco riferito a varii raggi sarebbe $l=mr$.

Dico ora che m ossia $\frac{l}{r}$ è costante, comunque varii il raggio, per uno stesso arco. Infatti abbiamo $\frac{l}{r}=m$; e prendiamo un altro raggio R, in modo che sia $R=nr$, sarà $r=\frac{R}{n}$; ed essendo $l=mr$, sarà $l=\frac{mR}{n}$; epperò $\frac{l}{r}=\frac{mR}{n}:\frac{R}{n}=m$, rapporto identico a quello di l riferito al raggio r. Adunque, qualunque sia il raggio, il rapporto delle linee trigonometriche di uno stesso arco al raggio è costante: cioè $\frac{l}{r}=$ costante, $\frac{l'}{R}=$ costante; epperò $l:l'=r:R$; cioè *le linee trigonometriche di uno stesso arco sono proporzionali a' raggi a' quali l' arco si riferisce.*

Adunque le linee trigonometriche sono indipendenti dal raggio; epperò non se ne considera mai il valore assoluto, ma il relativo al raggio, che per lo stesso arco riferito a differenti raggi è costante.

3.ª Supponiamo che varii l'arco e'l raggio, faremo $l=f(r,\varphi)$. Sia svolta questa funzione in serie secondo le potenze ascendenti di r (vedi l'algebra) la sua forma sarà

$l=rf\varphi+r^2f'\varphi+$ ec.; epperò sarà $\frac{l}{r}=f\varphi+rf'\varphi+$ ec.: ma quando φ è lo stesso, il rapporto $\frac{l}{r}$ è indipendente da un dato valore di r; sicchè dovranno da questa equazione scomparire tutt'i termini ne' quali esiste r, epperò

$\frac{l}{r}=f\varphi$, ed $l=rf\varphi$; onde $l'=r'f\varphi$; epperò $l:l'=r:r'$.

4.ª Esponiamo quale forma potrebbe avere la $f(r, \varphi)$ nell'equazione $l=f(r, \varphi)$, s'essa potesse aver luogo: o potrà supporsi

$l=f(r, \varphi)=fr+f\varphi$; o $l=f(r, \varphi)=\frac{fr}{f\varphi}=\frac{f\varphi}{fr}$ o $l=mrf\varphi$. La forma $l=fr+f\varphi$, e l'altra $l=\frac{f\varphi}{fr}$ sono assurde; poichè supponendo $r=0$, sarà nel primo caso $l=f\varphi$, e nel secondo $l=\infty$, mentre che quando è $r=0$ non esiste nè arco, nè linea trigonometrica di alcuna maniera. La forma $l=\frac{fr}{f\varphi}$ è equivalente all'altra $l=frF\varphi=mrF\varphi$ con fare $\frac{1}{f\varphi}=F\varphi$, e $fr=mr$. Adunque l'unica forma che conviene all'equazione $l=f(r, \varphi)$ è $l=mrF\varphi$, nella quale, fatto $r=0$ epperò $l=0$, risulta $F\varphi=\frac{0}{0}$ cioè indeterminato: il che mostra che quando è $r=0$, non può assegnarsi alcun arco determinato, come dee essere. Facendo $mr=R$ l'equazione $l=mrF\varphi$ diverrà $l=RF\varphi$, come sopra.

Dall'equazione $l=mrF\varphi$ segue che $F\varphi$ è un numero cioè un rapporto: infatti essendo $F\varphi$ eterogeneo da l e da mr, questa equazione non può reggere altrimenti per lo principio degli omogenei che sotto la forma $F\varphi=\frac{l}{mr}$. Dalla stessa equazione $l=mrF\varphi$ si deduce che m è un numero costante. Che m sia numero si deduce dall'equazione $m=\frac{l}{rF\varphi}$ in cui l, r, $F\varphi$ sono numeri e dipiù lo dimostra la forma frazionaria $\frac{l}{rF\varphi}$.

Che poi questo numero sia costante può dimostrarsi così. Siano r, r' due raggi differenti e φ uno stesso arco riferito successivamente a questi raggi. Se m potesse variare col variare del raggio,

si avrebbe $l = mrF_\varphi$, $l' = m'r'F_\varphi$. Questa seconda equazione dee esser tale che fatto $r = r'$ dee risultare identica alla prima, epperò $l = l'$, poichè F_φ e r sono gli stessi nelle due equazioni. Sicchè le due predette equazioni diverranno $l = mrF_\varphi$, $l = m'rF_\varphi$, la identità delle quali dà intuitivamente $m' = m$. Adunque m è una quantità costante. Epperò avremo $l = mrF_\varphi$, $l = mr'F_\varphi$, supponendo che variino i soli raggi; onde sarà $l : l' = r : r'$. Sicchè la sola forma che può prendere una linea trigonometrica è $l = rf_\varphi$.

19. Sia l una linea trigonometrica qualunque riferita al raggio 1; se la stessa si vorrà riferire al raggio r, sarà $1 : r = l : rl$. Adunque *una linea trigonometrica l per riguardo al raggio* 1 *diviene $l' = rl$ quando si riferisce al raggio r.*

L' equazione $l' = rl$ dà $l = \frac{l'}{r}$. Sicchè una linea trigonometrica l' riferita al raggio r si rapporterà al raggio 1 *facendo* $l = \frac{l'}{r}$.

20. Adunque se col centro C (Fig. 5 n.° 1 e 2) e col raggio CB intendasi descritto l'arco BE, e col centro A e col raggio AB s'intenda descritto l'arco BD, sarà $BM = BC$ sen $C = BA$ sen A; $CM = BC \cos C$; $AM = BA \cos A$. Epperò se i lati di un triangolo ABC si dinotino con a, b, c rispetto agli angoli rispettivamente opposti ad essi, si avrà, quando la perpendicolare BM cade fra' lati, $CA = CM + MA$; cioè $b = a \cos C + c \cos A$: (Fig. 5 n.° 1) e dimostrando lo stesso quando la perpendicolare si abbassa da A e da C sul lato opposto, avremo il sistema delle tre equazioni

$$\text{(I)}\quad a = b\cos C + c\cos B \,..\, b = a\cos C + c\cos A \,..\, c = a\cos B + b\cos A.$$

21. Tirisi nel cerchio una corda CC' (Fig. 4), e suppongasi che la BM la quale passa pel centro del cerchio sia perpendicolare a questa corda in m: indicando con B, B' rispettivamente gli angoli CBm, $C'Bm$, con b, b' i lati opposti Cm, $C'm$; essendo $BC = BC' = r$ e $c = Bm$ comune a' due triangoli CBm, $C'Bm$,

avremo sulle prime che la formola (I) applicata al triangolo BCC' darà

$$BC = CC' \cos C + BC' \cos CBC'; \text{ ossia}$$
$$r = (b + b') \cos C + r \cos (B + B') \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$BC' = CC' \cos C' + BC \cos CBC'; \text{ ossia}$$
$$r = (b + b') \cos C' + r \cos (B + B') \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

La differenza darà $(b+b')(\cos C - \cos C') = 0$; onde sarà $C = C'$. Ciò posto i due triangoli BCm, $BC'm$ daranno rispettivamente

$$Bm = CB \cos CBm + Cm \cos CmB, \text{ ossia } c = r \cos B \text{ (essendo } CmB = 90^\circ)$$
$$Bm = C'B \cos C'Bm + C'm \cos BmC', \text{ ossia } c = r \cos B'.$$

La differenza dà $r(\cos B - \cos B') = 0$; onde $B = B'$; epperò arco CK = arco $C'K$.

Finalmente gli stessi triangoli BmC, BmC' danno
$BC = Cm \cos C + Bm \cos CBm$, ossia $r = b \cos C + c \cos B$
$BC' = C'm \cos C' + Bm \cos C'Bm$, ossia $r = b' \cos C' + c \cos B'$;
ma quassù abbiamo dimostrato $B = B'$, $C = C'$; sicchè sarà $b \cos C = b' \cos C'$, cioè $b = b'$.

Adunque il raggio perpendicolare ad una corda la dividerà per metà; e dividerà anche per metà l'angolo al centro fatto da' due raggi tirati all'estremità della stessa corda; epperò anche l'arco sotteso dalla predetta corda.

Potremo enunciare più generalmente il presente teorema nel seguente modo.

Poichè dietro l'ipotesi di $BC = BC'$ e di Bm perpendicolare su di CC' abbiamo dimostrato $CBm = C'Bm$, $Cm = C'm$, $BCm = BC'm$ ne segue che *se dal vertice dell'angolo contenuto da' lati eguali di un triangolo isoscele si tiri una perpendicolare alla base, questa dividerà l'angolo predetto in due angoli eguali, e la base per metà; e saranno eguali gli angoli opposti a' lati eguali.*

Essendo $Bn = B'n$ (Fig. 6) sarà $\operatorname{sen} \varphi = \frac{1}{2}$ corda 2φ.

22. Consideriamo come positiva la semicirconferenza e il semicerchio superiore ADA', (Fig. 6) l'inferiore ASA' sarà negativa; e per la stessa ragione se DAS è considerata positivamente, $DA'S$ lo sarà negativamente. Il semicerchio ADA' sarà il luogo de'seni positivi, e l'altro ASA' lo sarà de'negativi; come pure SAD sarà il luogo de' coseni positivi, siccome $SA'D$ lo sarà de'coseni negativi; epperò, tirando la BnB' perpendicolare al raggio CA, se $AB=\varphi$, sarà $AB'=-\varphi$ (prec.); ed essendo $nB'=-nB$, sarà $\text{sen}(-\varphi)=-\text{sen}\varphi$. Si ha poi $Cn=\cos\varphi=\cos(-\varphi)$. Adunque il *seno di un arco è positivo o negativo, secondochè l'arco sarà positivo o negativo; e il coseno di un arco negativo è lo stesso coseno dell'arco positivo eguale.*

23. Laonde sarà

$\text{sen}(90+\varphi)=\cos\text{compl.}(90+\varphi)=\cos-\varphi=\cos\varphi=\text{sen}(90-\varphi)$ e $\cos(90+\varphi)=\text{sen}-\varphi=-\text{sen}\varphi=-\cos(90-\varphi)$: cioè *due archi supplementi hanno lo stesso seno e collo stesso segno; e lo stesso coseno ma con diverso segno; ed è negativo il coseno dell'angolo ottuso.*

24. Abbiamo dimostrato (15)

$\text{sen}0=0$, $\text{sen}90=r$; $\cos0=r$, $\cos90=0$: quindi sarà
$\text{sen}180=\cos-90=\cos90=0$;
$\cos180=\text{sen}-90=-\text{sen}90=-r$.
$\text{sen}270=\text{sen}-90=-\text{sen}90=-r$;
$\cos270=-\cos-90=-\cos90=-0$.
$\text{sen}360=\text{sen}-180=-0$; $\cos360=\cos-180=r$.

E se simboleggiamo con π la circonferenza circolare; avremo le seguenti formole

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\pm b\right)=\cos\mp b=\cos b;\ \cos\left(\frac{\pi}{4}\pm b\right)=\text{sen}\mp b=\mp\text{sen}\,b$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\pm b\right)=\text{sen}\mp b=\mp\text{sen}\,b;\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\pm b\right)=-\cos\mp b=-\cos b$$

$$\text{sen}\left(\frac{3}{4}\pi \pm b\right) = \cos - \left(\frac{\pi}{2} \pm b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm b\right) = -\cos b$$

$$\cos\left(\frac{3}{4}\pi \pm b\right) = \text{sen} - \left(\frac{\pi}{2} \pm b\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \pm b\right) = \pm \text{sen}\, b$$

$$\text{sen}\,(\pi \pm b) = \text{sen} - \left(\frac{\pi}{2} \pm b\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \pm b\right) = \pm \text{sen}\, b$$

$$\cos(\pi \pm b) = -\cos - \left(\frac{\pi}{2} \pm b\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm b\right) = \cos b.$$

25. Intendasi (Fig. 8) dal punto B tirata una retta BC a piacere sulla AA', e prendasi $CA = CA'$, e suppongansi unite le rette BA, BC, BA', avremo due triangoli ABC, $A'BA$ i quali, se loro si adatta la formola (I), daranno le due equazioni

$AC = BA \cos BAC + BC \cos BCA$, ossia $b = c \cos A + a \cos C$...(1)
$AA' = BA \cos A + BA' \cos A'$; cioè... $2b = c \cos A + c' \cos A'$...(2)

Sottraendo (1) da (2), si avrà . . . . . $b = c' \cos A' - a \cos C$...(3)

Il triangolo $BC'A$, in cui la perpendicolare cade fuori de' lati darà $b = c' \cos A' \pm a \cos C'$; da cui si ha $b - c' \cos A' = \pm a \cos C'$ (4): osserviamo quali di questi due segni dee rimanere. Paragonando (3) con (4), si avrà $-a \cos C = \pm a \cos C'$. L'equazione $-a \cos C = -a \cos C'$ dà $C = C'$; lo che ha luogo pel solo caso particolare di BC perpendicolare ad AA' epperò di $c = c'$, $A = A'$ (21); lo che non è l'ipotesi adottata. Adunque bisognerà escludere il segno $-$; e ritenere $-a \cos C = a \cos C'$ epperò sarà $\cos C = -\cos C'$, cioè $C + C' = 180$ (23). Sicchè *se una retta incontra comunque un'altra, gli angoli conseguenti saranno eguali a due retti.*

26. Dimostreremo (Fig. 8) ora che la formola (I) si verifica pure quando la perpendicolare BD tirata da B sul lato opposto AC cade fuori i lati BA', BC'. A tal oggetto suppongasi il lato $A'C'$ prolungato in A e, presa $CA = CA' = b$, sia $BA = c$, $BA' = c'$,

$BC=a'$, $BCA=C$, $BCA'=C'$; avremo nel triangolo ABA' in cui la perpendicolare BD cade tra'lati BA, BA',

$2b=c\cos A+c'\cos A'$... (1). Or il triangolo ABC dà per la stessa ragione $b=c\cos A+a'\cos C=c\cos A-a'\cos C'$..... (2) (per essere $C'=180-C$): adunque sottraendo (2) da (1) sarà $b=c'\cos A'+a'\cos C'$, ossia $CA'=BA'\cos A'+BC'\cos C'$, equazione della stessa forma di (I). Epperò questa equazione appartiene ad un triangolo qualunque, o che la perpendicolare cada fra' lati o fuóri.

Noi prenderemo l'equazione trinomiale (I) per principio fondamentale del presente lavoro.

27. Adattiamo la formola cardinale al triangolo rettangolo, e supponiamo retto l'angolo A epperò $\cos A=0$, le tre formole (I) diverranno

$$a-b\cos C-c\cos B=0\,,\ b-a\cos C=0\,,\ c-a\cos B=0:$$

Sostituendo nella prima i valori relativi di $\cos C$ e di $\cos B$ presi rispettivamente dalla 2ª e 3ª, avremo

$$a-\frac{b^2}{a}-\frac{c^2}{a}=0,\ \text{cioè}\ a^2=b^2+c^2:\ \text{sicchè}$$

nel triangolo rettangolo il quadrato del lato opposto all'angolo retto è eguale alla somma de' quadrati de' lati che lo comprendono.

28. Epperò (Fig. 6) sarà $CE^2=Cm^2+mE^2$; cioè $r^2=\text{sen}\varphi^2+\cos\varphi^2$ ossia, fatto $r=1$, sarà

$$1=\sqrt{\text{sen}^2\varphi+\cos^2\varphi};\ \text{sen}\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi};\ \cos\varphi=\sqrt{1-\text{sen}^2\varphi}$$

Essendo $\text{sen}\,45^\circ=\cos(90-45^\circ)=\cos 45^\circ$, avremo

$$\text{sen}^2 45+\cos^2 45=2\,\text{sen}^2 45=2\cos^2 45=r^2;\ \text{onde}$$

$$\text{sen}\,45=\cos 45=\frac{r}{\sqrt{2}}=\frac{r\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

29. L'equazione $b - a\cos C = 0$ per rispetto al triangolo rettangolo dà $\cos^2 C = \frac{b^2}{a^2}$: quindi $\text{sen}^2 C = 1 - \cos^2 C = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$; epperò $\text{sen}\, C = \frac{c}{a}$; ma l'equazione $c - a\cos B = 0$ dà $\cos B = \frac{c}{a}$; dunque $\text{sen}\, C = \cos B$; epperò $B + C = 90$: onde $A + B + C = 180$. Cioè *i tre angoli di un triangolo rettangolo sono eguali a due retti.*

Sia M una quantità il cui valore variabile tende verso zero, e P, che non mai raggiunge le quantità P e 'l zero diconsi limiti della grandezza M. Dunque *il limite di un angolo o della somma di due angoli del triangolo rettangolo è zero e* 180°.

30. Sia ACB (Fig. 7 n.° 1°) un triangolo in cui la perpendicolare abbassata da C su di AB cade fra' lati CA, CB; sarà (prec.) $A + ACD = 90$; $B + BCD = 90$; epperò $A + B + ACB = 180$. Cada ora la perpendicolare CD fuori de' lati CB, CA' del triangolo $BA'C$; sarà

$$CA'B = 180 - CA'A = CDA' + A'CD:$$

aggiungendo d'ambe le parti $CBA' + BCA'$, avremo

$$CA'B + CBA' + BCA' = CDA' + A'CD + CBA' + A'CB = 90 + CBA' + (A'CD + A'CB) = 90^\circ + CBA' + BCD = 180^\circ.$$

Epperò *la somma degli angoli di un triangolo è eguale a due angoli retti.*

Sicchè ciascheduno de' tre angoli di un triangolo può aver un valore qualunque sotto la condizione del limite zero e 180°.

Quindi, essendo $CBA + BCA + CAB = 180 = CBA + CBD'$, sarà $CBD' = BCA + BAC$. Epperò *se si prolungherà un lato di un triangolo, l'angolo esterno sarà eguale alla somma de' suoi interni opposti.*

31. Si deduce da ciò, 1° che un triangolo non può avere più di un angolo retto, e tanto maggiormente non può avere più di un angolo ottuso; 2° che quando il triangolo è ottusangolo la perpen-

dicolare che si abbassa sul lato $A'B$ adjacente (Fig. 7) all'angolo ottuso A' dal vertice C dell'angolo opposto cade fuori di dati: poichè se il triangolo fosse $CA'D'$, e la perpendicolare cadesse fra' lati come CB, nel triangolo $CA'B$, vi sarebbe un angolo retto CBA' e un angolo ottuso $CA'B$, lo che è assurdo: 3° che dati due angoli di un triangolo, il terzo angolo è dato come supplemento a due retti; e in questo caso il triangolo dicesi dato di specie: 4° che sono equiangoli due triangoli i quali hanno due angoli rispettivamente eguali: 5° che da un punto fuori di una retta non si può tirare su di questa che una sola perpendicolare; poichè se se ne potessero tirare due come CB, CA', ne risulterebbe il triangolo CBA' con due angoli retti, lo chè è assurdo.

32. Poichè un poligono $ABCDE\ldots$ (Fig. 9) di n lati si può dividere in $(n-2)$ triangoli per mezzo di rette che si tirano da uno de' suoi angoli agli altri opposti, ne segue *che gli angoli di un poligono qualunque sono eguali ad* $(n-2)$ *due retti.*

E poichè la somma degli angoli interni ed esterni di un poligono i cui lati siano stati prolungati verso m, n, p, r, $q\ldots$ sono eguali $2n$ retti, chiamando e la somma degli angoli esterni e i quella degl'interni sarà $e+i=2n$ retti, e $i=2(n-2)$ retti; onde sarà $e=2n$ retti$-2(n-2)$ retti$=4$ retti. Adunque *la somma degli angoli esterni fatti da' lati di un poligono qualunque, prolungati, col lato adjacente è costante, cioè eguale a due retti.*

33. Si seghino le rette AA', BB' (Fig. 8) in un punto C; e si prenda $CA=CA'=b$, $CB=CB'=a$, e si soppongano congiunte AB, $A'B'$ che si dinotino rispettivamente con c, g; i due triangoli ACB, $A'CB'$ daranno

$$b=a\cos BCA+c\cos BAC;\ b=a\cos B'CA'+g\cos B'A'C;$$

prendendone la differenza, si avrà

$$a(\cos BCA-B'CA')+c\cos BAC-g\cos B'A'C=0$$

questa equazione, reggendo tra quantità indeterminate, darà

(1) $\cos BCA=\cos B'CA'$ epperò $BCA=B'CA'$; (2)... $c=g$; (3)... $BAC=B'A'C$.

L'equazione (1) dimostra che *quando due rette si segano gli angoli opposti al vertice sono eguali fra loro.*

Le altre equazioni (2) e (3) riferite a'dati $CB=CB'$, $CA=CA'$ e agli angoli BCA, $B'CA'$ or dimostrati eguali, ci fanno conoscere che *quando due triangoli hanno eguali rispettivamente due lati coll'angolo da questi compreso, li rimanenti elementi del triangolo saranno eguali.*

34. Dimostreremo il precedente teorema direttamente nel seguente modo. Siano a, b, c, A, B, C; a', b', c', A', B', C' i lati rispettivi co'rispettivi angoli opposti di due triangoli; e supponiamo $a=a'$, $b=b'$, $C=C'$: l'equazione fondamentale applicata a questi triangoli sotto le precedenti condizioni darà

$$(1)\ a-b\cos C-c\cos B=0;\ (2)\ a-b\cos C-c'\cos B'=0$$
$$(3)\ b-a\cos C-c\cos A=0;\ (4)\ b-a\cos C-c'\cos A'=0$$

Sottraendo (1) da (2) e (3) da (4) si avrà

$$c\cos B-c'\cos B'=0;\ c\cos A-c'\cos A'=0.$$

Queste equazioni potrebbero esser soddisfatte in due modi 1° $c=c'$, $B=B'$, $A=A'$, trattandosi di quantità indeterminate; 2° $c:c'=\cos B':\cos B=\cos A':\cos A$. Questa seconda condizione non può aver luogo che sotto la sola prima condizione: infatti se potesse essere c diseguale a c' sarebbe o $c>c'$, o $c<c'$: nel 1° caso sarebbe $\cos B'>\cos B$, $\cos A'>\cos A$ epperò $B'<B$, $A'<A$, e quindi $A'+B'<A+B$, ed essendo $C=C'$, sarà $A'+B'+C'<A+B+C$ (assurdo): nel 2° caso poi sarà $A'+B'+C'>A+B+C$ (assurdo). Adunque rimane solo $c=c'$, $B=B'$, $A=A'$: cioè *se due triangoli hanno sotto due lati rispettivamente eguali gli angoli compresi eguali, saranno eguali e potranno cambaciare;* cioè saranno eguali gli angoli opposti a'lati eguali, e i rimanenti lati.

35. Abbiano due triangoli ACB, $A'C'B'$ gli angoli A, B rispettivamente eguali agli angoli A', B'; e'l lato c adjacente a'primi sia eguale al lato c' adjacente agli altri due, sarà $A=A'$;

$B=B'$; $c=c'$. Con queste condizioni l'equazione fondamentale applicata a questi due triangoli diverrà

$$c=b\cos A+a\cos B;\ c=b'\cos A+a'\cos B$$

La loro differenza darà

$$\cos A(b-b')+\cos B(a-a')=0.$$

Non potendo essere $\cos A=0$, $\cos B=0$ perchè sarebbe $A=90$, $B=90$, lo che è assurdo, fa uopo che sia $b=b'$, $a=a'$, epperò $\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{0}{0}$, lo che indica la generalità del teorema, qualunque sia il valor di A, B sotto il limite di $A+B<180$. Quanto a C, C' essi pure saranno eguali come supplementi a due retti di angoli eguali: lo che potrebbe anche dimostrarsi direttamente per mezzo dell'equazione cardinale: infatti unita all'ipotesi presente l'egualità di b, b'; e di a, a', l'equazione cardinale applicata a'medesimi triangoli condizionati come qui sopra darà

$$a-b\cos C-c\cos B=0\ a-b\cos C'-c\cos B=0.$$

La differenza darà $b(\cos C'-\cos C)=0$ cioè $C=C'$ (a). Adunque *sono eguali due triangoli che hanno un lato eguale e gli angoli a questo adjacenti eguali, ed essi combaceranno quando si facciano combaciare i due lati eguali.*

36. Sia ora $A=A'$, $B=B'$ e $a=a'$: applicando l'equazione fondamentale a questi triangoli sotto le date condizioni, si avrà

$$c-b\cos A-a\cos B=0\ldots\ c'-b'\cos A-a\cos B=0.$$

La differenza darà

$$c-c'+\cos A(b'-b)=0$$

(a) Lo che mostra il teorema della costanza della somma de' tre angoli del triangolo.

Ed essendo A una quantità indeterminata, sarà

$$c-c'=0,\ b'-b=0,\ \text{cioè}\ c=c',\ b=b',\ \text{epperò}$$

$\cos A=\frac{0}{0}$, forma conveniente alla natura indeterminata di A.

Per ciocchè risguarda gli angoli C, C' (che d'altronde sappiamo di esser eguali come supplementi a due retti di angoli eguali), volendosi ciò dimostrare coll'ajuto della stessa formola cardinale, introdurremo in essa $B=B'$, $a=a'$ (per ipotesi); $b=b'$, $c=c'$ (per dimostrazione) e si avrà

$$a-b\cos C-c\cos B=0;\ a-b\cos C'-c\cos B=0:$$

La differenza darà $b(\cos C'-\cos C)=0$; onde $C=C'$. Sicchè sono *eguali pure due triangoli che hanno due angoli rispettivamente eguali col lato opposto ad uno degli angoli eguali, e gli elementi di essi potranno combaciare.*

37. Abbiano due triangoli ABC, $A'B'C'$, $a=a'$; $b=b'$, e uguale pure un angolo opposto ad uno di questi lati, p. e. $A=A'$. Applicando l'equazione fondamentale a questi triangoli sotto le adottate condizioni, sarà

$$(g)\ldots\begin{cases} b-a\cos C-c\cos A=0\ldots. & b-a\cos C'-c'\cos A=0 \\ c-a\cos B-b\cos A=0\ldots. & c'-a\cos B'-b\cos A=0 \end{cases}$$

La differenza di ciascheduna coppia darà

$$(h)\ldots a(\cos C'-\cos C)-\cos A(c-c')=0\ldots c-c'+a(\cos B'-\cos B)=0$$

Non potendo esser nè $a=0$ perchè non vi sarebbe più triangolo, nè $\cos A=0$, perchè sarebbe $A=90$, mentre il suo valore è indeterminato (cioè il problema è generale), uopo e che sia $c-c'=0$, $\cos C-\cos C'=0$, $\cos B-\cos B'=0$, cioè $c=c'$, $C=C'$, $B=B'$: onde la prima dell'equazioni (h) darà

$\cos A=\frac{0}{0}$, lo che si riferisce alla generalità del teorema, cioè per qualsiasi valore di A tra'limiti degli angoli del triangolo rettilineo.

La condizione $\cos B' - \cos B = 0$ dedotta dalla natura dell'equazione (h) dimostra che B, B' debbono essere della stessa specie. Infatti se B, B' potessero essere di specie differente, supponendo $B < 90^o$, sarebbe $B' > 90$; epperò $\cos B > 0$, $\cos B' < 0$; per cui le due seconde formole (g) diverrebbero in questa ipotesi $c - a\cos B - b\cos A = 0 \ldots c' + a\cos B' - b\cos A = 0$, la differenza delle quali sarà $c - c' - a(\cos B + \cos B') = 0$. Si deduce da questa ultima equazione $c = c'$, $\cos B = -\cos B'$: sostituendo questo valore di c' e $\cos B'$ nella quarta dell'equazioni (g), scriveremo la 3ª e la 4ª così

$$c - a\cos B - b\cos A = 0; \quad c + a\cos B - b\cos A = 0.$$

La differenza darà $2a\cos B = 0$, epperò $\cos B = 0$, ma abbiamo veduto essere nella presente ipotesi $\cos B' = -\cos B$; adunque $\cos B' = -0$, epperò (24) $B' = 270^o$ (assurdo). Adunque B, B' non possono essere di specie differente. Epperò *saranno eguali due triangoli che hanno due lati eguali rispettivamente e degli angoli non compresi da questi, due eguali e due della stessa specie.* E potranno combaciare.

38. Siano a, b, c; a', b', c' i lati rispettivi di due triangoli e supponiamo $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$: le tre formole dell'equazione cardinale in virtù di questa ipotesi diverranno

$$\begin{aligned} a - b\cos C - c\cos B = 0 \ldots\ & a - b\cos C' - c\cos B' = 0 \\ b - a\cos C - c\cos A = 0 \ldots\ & b - a\cos C' - c\cos A' = 0 \\ c - a\cos B - b\cos A = 0 \ldots\ & c - a\cos B' - b\cos A' = 0 \end{aligned}$$

Prendendo la differenza in ordine e dividendo le due prime per c e l'ultima per a, avremo

$$\left.\begin{aligned} \frac{b}{c}(\cos C' - \cos C) + \cos B' - \cos B = 0 \\ \frac{a}{c}(\cos C' - \cos C) + \cos A' - \cos A = 0 \\ \frac{b}{a}(\cos A' - \cos A) + \cos B' - \cos B = 0 \end{aligned}\right\} (H)$$

Queste tre equazioni hanno tale relazione che da due di esse dipende la terza, eliminando la comune quantità: e reggendo esse tra quantità indeterminate, sarà $C=C'$, $B=B'$, $A=A'$. Epperò *se due triangoli hanno i lati eguali, avranno anche eguali gli angoli opposti a' lati eguali.*

39. Le tre equazioni (H) danno

$$\frac{b}{c}=\frac{\cos B-\cos B'}{\cos C'-\cos C};\ \frac{a}{c}=\frac{\cos A-\cos A'}{\cos C'-\cos C};\ \frac{b}{a}=\frac{\cos B-\cos B'}{\cos A'-\cos A}$$

E queste dimostrano che essendo $A=A'$, $B=B'$, $C=C'$, sarà

$\frac{b}{c}=\frac{0}{0}$; $\frac{a}{c}=\frac{0}{0}$; $\frac{b}{a}=\frac{0}{0}$, cioè $\frac{b}{c}=\frac{a}{c}=\frac{b}{a}$ qualunque siasi il valore

assoluto di A, B, C e di a, b, c. E se supponiamo $\frac{b}{c}=\frac{a}{c}=\frac{b}{a}$, sarà

$\cos B=\cos B'$, $\cos C=\cos C'$, $\cos A=\cos A'$, cioè $A=A'$; $B=B'$; $C=C'$. Cioè *che i triangoli equiangoli hanno i lati intorno e di rimpetto agli angoli eguali proporzionali; e che i triangoli i quali hanno i lati intorno agli angoli eguali proporzionali sono equiangoli.*

Ma dimostriamo direttamente questi teoremi.

40. Siano equiangoli due triangoli, cioè $A=A'$, $B=B'$, $C=C'$, e i lati rispettivamente opposti a questi angoli siano a, a'; b, b'; c, c': la formola fondamentale adattata a questi triangoli sotto la condizione precedente darà

$$\frac{a}{c}-\cos B-\frac{b}{c}\cos C=0\ldots\ \frac{a'}{c'}-\cos B-\frac{b'}{c'}\cos C=0$$

$$\frac{b}{c}-\cos A-\frac{a}{c}\cos C=0\ldots\ \frac{b'}{c'}-\cos A-\frac{a'}{c'}\cos C=0$$

$$\frac{c}{a}-\cos B-\frac{b}{a}\cos A=0\ldots\ \frac{c'}{a'}-\cos B-\frac{b'}{a'}\cos A=0$$

La differenza di ciascheduna coppia in ordine darà

$$\frac{a}{c}-\frac{a'}{c'}-\cos C\left(\frac{b}{c}-\frac{b'}{c'}\right)=0$$

$$\frac{b}{c}-\frac{b'}{c'}-\cos C\left(\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}\right)=0$$

$$\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}-\cos A\left(\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}\right)=0$$

Dovendo queste tre equazioni aver luogo per qualunque valore di A e C sotto la condizione di $A+C<180$, fa uopo che sia $\frac{a}{c}-\frac{a'}{c'}=0$; $\frac{b}{c}-\frac{b'}{c'}=0$; $\frac{b}{a}-\frac{b'}{a'}=0$; $\frac{c}{a}-\frac{c'}{a'}=0$, due delle quali danno le altre due. Sicchè *i triangoli equiangoli hanno i lati omologhi intorno agli angoli eguali proporzionali.*

Le figure piane equiangole e che di più hanno i lati omologhi intorno agli angoli eguali proporzionali diconsi *simili*. Adunque basta che i triangoli siano equiangoli per essere simili.

Un triangolo di cui si conoscono i soli angoli dicesi con linguaggio geometrico *dato di specie*.

41. Quindi essendo equiangoli i triangoli CnB, CAT (Fig. 6), chiamando φ l'arco BA, e facendo $r=1$, sarà $AT=\frac{CA.nB}{Cn}$, cioè $\operatorname{tang}\varphi=\frac{r\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}=\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}$; e $CT=\frac{CA.CB}{Cn}$, cioè $\operatorname{seg}\varphi=\frac{r^2}{\cos\varphi}=\frac{1}{\cos\varphi}$; e parimente i due triangoli CGB, CDM daranno

$$DM=\cot\varphi=\frac{r\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi};\ CM=\operatorname{coseg}\varphi=\frac{r^2}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}.$$

Epperò avremo le seguenti formole (23)

$$\text{tang}(90-\varphi)=\frac{\text{sen}(90-\varphi)}{\cos(90-\varphi)}=\frac{\text{sen}(90+\varphi)}{-\cos(90+\varphi)}=-\text{tang}(90+\varphi)$$

$$\text{seg}(90-\varphi)=\frac{1}{\cos(90-\varphi)}=\frac{1}{-\cos(90+\varphi)}=-\text{seg}(90+\varphi)$$

$$\cot(90-\varphi)=\frac{\cos(90-\varphi)}{\text{sen}(90-\varphi)}=\frac{-\cos(90+\varphi)}{\text{sen}(90+\varphi)}=-\cot(90+\varphi)$$

$$\text{coseg}(90-\varphi)=\frac{1}{\text{sen}(90-\varphi)}=\frac{1}{\text{sen}(90+\varphi)}=\text{coseg}(90+\varphi)$$

Cioè due angoli supplementi avranno la stessa tangente, segante e cotangente ma con differente segno, essendo negative quelle dell' angolo ottuso; ed avranno poi la stessa cosegante collo stesso segno.

Abbiamo $\text{tang}\,45=\cot 45=\frac{r\,\text{sen}\,45}{\text{sen}\,45}=\frac{r\cos 45}{\cos 45}=r=1$;

$$\text{seg}\,45=\text{coseg}\,45=\frac{r^2}{\text{sen}\,45}=r^2:\frac{r}{\sqrt{2}}\,(28)=r\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

Parimente avremo $\text{tang}\,0=\frac{\text{sen}\,0}{\cos 0}=\frac{0}{r}\,(24)=0$; $\cot 0=\frac{r}{0}=\infty$;

$$\text{seg}\,0=\frac{r^2}{r}=r=1;\ \text{coseg}\,0=\frac{r^2}{0}=\infty$$

$$\text{tang}\,90=\frac{r\,\text{sen}\,90}{\cos 90}=\frac{r^2}{0}=\infty;\ \cot 90=\frac{0}{r}=0;$$

$$\text{seg}\,90=\frac{r^2}{0}=\infty;\ \text{coseg}\,90^{\circ}=\frac{r^2}{r}=r=1$$

$$\text{tang}\,180=\frac{r\,\text{sen}\,180}{\cos 180}=\frac{r.0}{-r}=-0;\ \cot 180=\frac{-r^2}{0}=-\infty;$$

$$\text{seg}\,180=\frac{r^2}{-r}=-r=-1;\ \text{coseg}\,180=\frac{r^2}{0}=\infty;$$

$$\text{tang}270=\frac{r\,\text{sen}270}{\cos 270}=\frac{r.-r}{-0}=\infty\,;\ \cot 270=\frac{r.-0}{-r}=0\,;$$

$$\text{seg}270=\frac{r^2}{-0}=-\infty\,;\ \text{coseg}270=\frac{r^2}{-r}=-r=-1$$

$$\text{tang}360=\frac{r.0}{r}=0\,;\ \cot 360=\frac{r.r}{0}=\infty\,;$$

$$\text{seg}360=\frac{r^2}{r}=r=1\,;\ \text{coseg}360=\frac{r^2}{0}=\infty\,.$$

42. Quindi il limite de'seni e coseni è r, $-r$, quello delle tangenti e cotangenti, ∞, $-\infty$; e il limite delle seganti e coseganti è r e ∞ positivi e negativi.

Essendo date tutte le linee trigonometriche, quando è dato il seno e'l coseno di un angolo, potrà facilmente esprimersi una linea trigonometrica per un altra; ed ecco alcune espressioni più usitate.

Da $\text{tang}=\frac{\text{sen}}{\cos}$, e $\cot=\frac{\cos}{\text{sen}}$ si ha $\text{tang}=\frac{1}{\cot}$, e $\cot=\frac{1}{\text{tang}}$. Da $\text{seg}=\frac{r^2}{\cos}$ si ha $\text{seg}^2=\frac{r^2}{\cos^2}.r^2=\frac{r^2(\text{sen}^2+\cos^2)}{\cos^2}=\text{tang}^2+r^2$, come sarebbesi anche ottenuto dal triangolo rettangolo *CAT*. Da $\text{seg}=\frac{r^2}{\cos}$, si ha $\cos=\frac{r^2}{\text{seg}}=\frac{r^2}{\sqrt{r^2+\text{tang}^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\text{tang}^2}}$. Epperò essendo

$\frac{\text{sen}}{\cos}=\text{tang}$, sarà $\text{sen}=\cos\,\text{tang}=\frac{r^2\,\text{tang}}{\sqrt{r^2+\text{tang}^2}}=\frac{\text{tang}}{\sqrt{1+\text{tang}^2}}$.

Ponendo in queste due formole $\frac{1}{\cot}$ per tang, sarà

$\cos=\frac{\cot}{\sqrt{1+\cot^2}}$, e $\text{sen}=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2}}$. E sarà utile l'esercitarsi in queste specie di trasformazioni.

43. Sia in due triangoli $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$, e prendiamo l'equazione fondamentale

$$a=b\cos C+c\cos B\ldots\ldots\ a'=b'\cos C'+c'\cos B'.$$

Dividendo la prima per b, e la seconda per b' e ponendo

$$\frac{a}{b}\text{ per }\frac{a'}{b'}\text{ e }\frac{c}{b}\text{ per }\frac{c'}{b'},\text{ si avrà}$$

$$\frac{a}{b}=\cos C+\frac{c}{b}\cos B\ldots\ \frac{a}{b}=\cos C'+\frac{c}{b}\cos B'.$$

Prendendo la differenza sarà

$$(M)\ldots\cos C-\cos C'+\frac{c}{b}(\cos B-\cos B')=0$$

Non potendo essere $\frac{c}{b}=0$, e d'altronde trattandosi di quantità indeterminate, si avrà $\cos C-\cos C'=0$, $\cos B-\cos B'=0$ cioè $B=B'$, $C=C'$ epperò $A=A'$, per cui i due triangoli saranno simili. *Cioè sono simili due triangoli i quali hanno i lati proporzionali, e saranno eguali gli angoli opposti a' lati omologhi,* $a=a'$ ec.

(*) Perchè apparisca più chiaramente la legittimità delle condizioni $\cos C-\cos C'=0$, $\cos B-\cos B'=0$ alle quali conduce l'equazione (M), osserveremo che mercè le formole dell' equazione fondamentale noi possiamo giungere, dietro l'ipotesi di $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ a dell'equazioni della forma

$$\alpha(\cos A-\cos A')=0;\ \beta(\cos B-\cos B')=0;\ \gamma(\cos C-\cos C')=0$$

le quali possono essere soddisfatte unicamente da $A=A'$, $B=B'$, $C=C'$.

(*) I §§ segnati con (*) contengono delle riflessioni, e dell' analisi di alcuni risultamenti ottenuti.

E infatti le formole dell'equazione fondamentale sotto le adottate condizioni divengono

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{b}\cos B+\cos C\ldots\ \frac{a}{b}=\frac{c}{b}\cos B'+\cos C'$$

$$1=\frac{a}{b}\cos C+\frac{c}{b}\cos A\ldots\ 1=\frac{a}{b}\cos C'+\frac{c}{b}\cos A'$$

$$\frac{c}{b}=\frac{a}{b}\cos B+\cos A\ldots\ \frac{c}{b}=\frac{a}{b}\cos B'+\cos A'$$

La differenza di ogni coppia darà

$$(1)\ldots\ \frac{c}{b}(\cos B-\cos B')+\cos C-\cos C'=0$$

$$(2)\ldots\ \frac{a}{b}(\cos C-\cos C')+\frac{c}{b}(\cos A-\cos A')=0$$

$$(3)\ldots\ \frac{a}{b}(\cos B-\cos B')+\cos A-\cos A'=0$$

Moltiplicando (1) per $\frac{a}{b}$ e (3) per $\frac{c}{b}$, e sottraendo sarà

$$\frac{a}{b}(\cos C-\cos C')-\frac{c}{b}(\text{coc}\,A-\cos A')=0$$

Sommando questa equazione e la (2), e poi sottraendo questa da (2) si avranno le due seguenti equazioni

$$2\frac{a}{b}(\cos C-\cos C')=0\ldots\ldots\ 2\frac{c}{b}(\cos A-\cos A')=0$$

le quali hanno chiaramente la forma

$$\alpha(\cos A-\cos A')=0,\ \gamma(\cos C-\cos C')=0,$$

e similmente potrebbe aversi $\beta(\cos B-\cos B')=0$: onde, non potendo essere $a=0$, $b=0$, $c=0$, ossia $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, fa uopo che sia $A=A'$, $B=B'$, $C=C'$.

44. Siano dati in due triangoli $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=m$; $C=C'$, la formola cardinale sotto le condizioni adottate diverrà

$$m=\frac{c}{b}\cos B+\cos C \ldots\ldots m=\frac{c'}{b'}\cos B'+\cos C$$

$$1=m\cos C+\frac{c}{b}\cos A \ldots\ldots 1=m\cos C+\frac{c'}{b'}\cos A'.$$

La sottrazione di ognuna di queste coppie darà

$$(K)\ldots \frac{c}{b}\cos B'-\frac{c'}{b'}\cos B'=0;\ \frac{c}{b}\cos A-\frac{c'}{b'}\cos A'=0.$$

Non potendo farsi $\cos B=0$, $\cos B'=0$, $\cos A=0$, $\cos A'=0$, perchè A, A', B, B' non possono essere insieme angoli retti, e sono anzi suscettibili di un valore qualunque sotto la condizione di $A+B+C=180=A'+B'+C'$, ne segue che le due equazioni (K) non potranno altrimenti esser soddisfatte che dall'equazioni $\frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}$, $B=B'$, $A=A'$. Adunque i predetti triangoli saranno simili. Epperò *sono simili due triangoli i quali hanno un angolo eguale e proporzionali i lati che lo comprendono.*

(*) Potrebbe osservarsi che l'equazioni (K) potrebbero esser anche soddisfatte da $\cos B : \cos B'=c'b : cb'=\cos A : \cos A'$. Vediamo se ciò può essere. Non considerando il caso di $\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}$, ossia di $\cos B=\cos B'$, $\cos C=\cos C'$, conseguenza a cui quassù siamo giunti, due casi possono accadere in questa nuova ipotesi; cioè o $\cos B>\cos B'$ epperò $\cos A>\cos A'$, o $\cos B<\cos B'$ epperò $\cos A<\cos A'$: avremo dunque o $B<B'$, $A<A'$; o pure $B>B'$, $A>A'$; sommando queste due inequazioni membro a membro, avremo $A+B<A'+B'$; o pure $A+B>A'+B'$: aggiungiamo a queste $C=C'$, si avrà $A+B+C<A'+B'+C'$ (assurdo) o $A+B+C>A'+B'+C'$ (assurdo). Adunque l'unica legitti-

ma conseguenza che può tirarsi dall'equazioni (K) è quella del teorema quassù dimostrato.

45. Siano i triangoli ABC (Fig. 18) $A'B'C'$ tali che i lati di uno sieno perpendicolari a quelli dell'altro; cioè $A'B'=c'$ perpendicolare ad $AB=c$; $A'C'=b'$ perpendicolare ad $AC=b$; e $B'C'=a'$ perpendicolare a $BC=a$: avremo (32) $B=180-mB'n$, $C=180-nC'p$; epperò (23) $\cos B=-\cos mB'n$, $\cos C=-\cos nC'p$. Adattando al triangolo ABC la formola fondamentale si avrà $a=b\cos C+c\cos B=-b\cos nC'p-c\cos mB'n=b\cos C'+c\cos B'$; epperò dividendo per a si avrà

$$1=\frac{b}{a}\cos C'+\frac{c}{a}\cos B' \ldots\ldots (h):$$

ma l'equazione fondamentale adattata al triangolo $A'B'C'$ dà

$$a'=b'\cos C'+c'\cos B', \text{ ossia } 1=\frac{b'}{a'}\cos C'+\frac{c'}{a'}\cos B' \ldots (k)$$

La differenza di (h) e (k) dà

$$\cos C'\left(\frac{b}{a}-\frac{b'}{a'}\right)+\cos B'\left(\frac{c}{a}-\frac{c'}{a'}\right)=0.$$

Ma non può essere $\cos C'=0$, $\cos B'=0$, perchè sarebbe $B'+C'=180$ (assurdo): fa uopo dunque che sia

$$\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'},\ \frac{c}{a}=\frac{c'}{a'} \text{ epperò } \frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}.$$

Adunque sono simili i triangoli che hanno i lati perpendicolari l'uno all'altro.

Essendo A' l'angolo omologo di A, ed $A=A'$; ne segue che se i lati di un angolo sono perpendicolari a' lati di un altro, questi angoli saranno eguali.

46. Supponiamo due rette mB, nA (Fig. 7 n.° 1° e 2°) segate da una retta BA colla condizione di $A+B<180$: e supponiamo una serie infinita di triangoli su di una retta $A'B'=AB$; i cui angoli A', B' variino per tutt'i possibili valori sotto la condizione di $A'+B'<180$; esisterà in questa serie quel triangolo in cui sarà $A=A'$, $B=B'$; sia $A'B'C'$ questo triangolo. In tal caso se ponia-

mo AB su di $A'B'$, A combacerà con A', B con B', epperò Bm si distenderà nella direzione di $B'C'$, An in quella di $A'C'$; e prolungando An, Bm, queste andranno ad unirsi in C', e cadrà C' sopra C, onde soddisfare alla condizione di $A+B+C=A'+B'+C'=180$ epperò di $C=C'$: poichè se Bm, An, prolungate non andassero ad unirsi in C', o dovrebbero convergere in un altro punto, come K, o nommai unirsi: nel 1° caso sarebbe $KB'A'=C'B'A'$, $KA'B'=C'A'B'$ (impossibile); nel 2° caso non si potrebbe render ragione perchè nelle stesse circostanze le $B'C'$, $B'A'$ si unirebbero; e le Bm, An no. Adunque *se due rette sono segate da un'altra in modo che con questa facciano la somma degli angoli minori di due retti, le predette rette prolungate dovranno unirsi in un punto e formare il terzo angolo supplemento a due retti de' due angoli dati.*

(*) Abbiamo dimostrato quassù che le due rette AB, CD (Fig. 10) perpendicolari alla stessa BC (*a*) non potranno mai convergere nè a destra nè a sinistra. Dietro la proprietà de' tre angoli del triangolo eguali a due retti ciò apparisce evidentemente; poichè se potessero esse convergere, ne risulterebbe un triangolo con due angoli retti, locchè è assurdo. *Adunque due o più rette perpendicolari ad un'altra saranno parallele* (lo che mette in più evidenza il n.° 3).

47. Siano BA, DC (Fig. 11) perpendicolari alla stessa retta CBD; esse saranno parallele. Supponiamo tirata da B una retta BC ad un punto qualunque C dell'altra DC, sarà (30)

$$DBC+BCD=90; \text{ onde } BCD=90-DBC=CBA.$$

Gli angoli che le parallele AB, CD fanno con una retta BC che le sega diconsi *angoli alterni*. Adunque *due rette parallele fanno con un'altra che le sega gli angoli alterni eguali.*

Adunque da un punto C una sola retta CD può tirarsi paral-

(*a*) Questa ipotesi è del più stretto rigore geometrico; poichè se possiamo supporre innalzata da C una perpendicolare a CB, per la stessa ragione possiamo supporre innalzatane un'altra da B, e infinite altre perpendicolari da altri punti della stessa retta.

lela ad un'altra retta BA, poichè se, oltre CD, potesse esservi un'altra retta CF pure parallela ad AB, supponendo congiunta BC, sarebbe l'angolo $ABC=BCF=BCD$, assurdo.

Siano ABK, LDR (Fig. 11) due angoli i cui lati sieno rispettivamente paralleli e diretti per lo stesso verso, e supponiamo che il lato BK incontri in C il lato DL, sarà $ABC=BCD=CDR$ (prec.): epperò sono eguali gli angoli fatti da rette parallele e dirette per lo stesso verso.

Siano AB, CD (Fig. 11) due rette parallele e siano tagliate da ACR e da BC, sarà $DCR=180-DCA=180-DCB-BCA=180-CBA-BCA=BAC$ (30). L'angolo DCR dicesi *esterno* per rispetto all'angolo BAC che dicesi *interno opposto dalla stessa parte*. Adunque *due rette parallele fanno con un'altra che le sega l'angolo esterno eguale al suo interno ed opposto dalla stessa parte.*

Siano AB, CD (Fig. 11) due rette parallele segate da AC, BC, sarà $ABC=BCD$ suo alterno; epperò

$$ABC+BAC+BCA=BCD+BAC+BCA=BAC+ACD;$$

ma $ABC+BAC+BCA=180$; dunque $BAC+ACD=180^{\circ}$. Gli angoli $BAC+ACD$ diconsi angoli interni della stessa parte per rispetto alle parallele AB, CD segate da AC. Adunque *due rette parallele segate da un'altra fanno con questa gli angoli interni della stessa parte eguali a due retti.*

Siano AB, DC (Fig. 11) due rette che con un'altra BC facciano gli angoli ABC, BCD eguali: e supponiamo tirata BD perpendicolare ad AB; sarà $ABC+CBD=90$; ma per ipotesi $ABC=BCD$; dunque sarà $BCD+CBD=90$, epperò $CDB=90$ (29). Adunque AB, CD essendo insieme perpendicolari alla retta BD, saranno parallele. Epperò *sono parallele due rette che con un'altra fanno gli angoli alterni eguali.*

Siano AB, CD (Fig. 11) due rette che facciano con un'altra CAE che le taglia l'angolo $BAE=DCE$, rimanendo la condizione di BA perpendicolare ad EB. Se BAE fosse retto, avendo supposto ABE retto, le rette BE, AE sarebbero parallele: sup-

poniamo perciò che BAE sia minore del retto; in tal caso le rette DB, CA andranno ad unirsi in un punto E (46); e sarà perciò $EBA=180-(E+EAB)=180-(E+ECD)$ (per essersi supposte $EAB=ECD$): ma $180-(E+ECD)=EDC$; adunque sarà $EBA=EDC=90$. Sicchè la retta ED sarà perpendicolare tanto ad AB che a CD; epperò queste saranno parallele. Sicchè *sono parallele due rette che segate da un' altra fanno con questa l' angolo esterno eguale al suo interiore e opposto dalla medesima parte.*

Siano DC, PQ (Fig. 11) ambe parallele a BA, sarà $DCR=BAR=PQR$: epperò (prec.) sarà DC parallela a PQ. Cioè *saranno parallele due rette che sono parallele ad un' altra.*

Siano BA, DC due rette che segate da QAC facciano $BAC+ACD=180^o=BAC+BAQ$: onde sarà $BAQ=ACD$; sicchè BA, DC saranno parallele. Epperò *saranno parallele due rette che fanno con un' altra che le taglia gli angoli interni della stessa parte eguali a due retti.*

(*) Abbiamo nelle precedenti teoriche sulle parallele usato il linguaggio comune per dare il rigore geometrico tanto desiderato alla teorica delle parallele, con farla dipendere dal solo principio del parallelismo di due rette perpendicolari ad un'altra. Del resto avremmo potuto anche con più facilità dedurre le stesse verità dalla nostra equazione fondamentale. Ed infatti eccone un'applicazione.

Siano AB, $A'B'$ (Fig. 12) perpendicolari alla stessa CB' epperò parallele: suppongasi $CB=a=C'B'=a'$, e CC', retta tirata da C a C', $=b$; l'equazione cardinale de' triangoli rettangoli applicata a' triangoli CBC', $CB'C'$ darà $a-b\cos C=0$, $a-b\cos C'=0$. La differenza di queste due equazioni darà $b(\cos C'-\cos C)=0$ epperò $\cos C'=\cos C$, e $C=C'$. Cioè *gli angoli alterni . . . . saranno eguali.*

Sia ora $C=C'$, e $B=90^o$, e suppongasi $a=a'$, il triangolo CBC' darà $a-b\cos C=0$, e l'altro $CB'C'$, $a-b\cos C-c'\cos B'=0$ la differenza darà $c'\cos B'=0$, epperò $\cos B'=0$ e $B'=90$. Or abbiamo $B+C+A=B'+C'+A'$, ed essendo $B=B'=90$, $C=C'$ sarà $A=A'$, epperò $BCB'=A'+C=A+C=90^o$: sicchè le due rette BC, $B'C'$ saranno entrambe perpendicolari a CB' epperò pa-

rallele, ch'è l'inversa della precedente. E così potremo dimostrare le altre proposizioni per mezzo dell'equazione fondamentale.

48. Supponiamo (Fig. 13) eguali e paralleli i due lati $AB=c$, $A'B'=c'$ del quadrilatero $ABA'B'$ e suppongasi tirata la diagonale BB' che chiameremo a, e facciamo $AB'=b$, $A'B=b'$, $ABB'=B$, $A'B'B=B'$, $AB'B=C$, $A'BB'=C'$, come sono indicati nella figura, sarà $B=B'$ suo alterno. Adattando a'triangoli BAB', $BA'B'$ la formola fondamentale sotto le adottate condizioni avremo

$$a=c\cos B+b\cos C\ldots\ldots\ a=c\cos B+b'\cos C'$$

La differenza darà $b\cos C-b'\cos C'=0$, equazione che regge nella sola ipotesi di $b=b'$, $C=C'$. Epperò *se due lati opposti di un quadrilatero sono eguali e paralleli, gli altri due lo saranno parimenti, e il quadrilatero sarà parallelogrammo.*

49. Supponiamo (Fig. 13) in un quadrilatero $b=b'$, $c=c'$, cioè i lati opposti eguali, e, supponiamo tirata la diagonale BB' che si dinoti con a. I due triangoli ABB', $A'B'B$ daranno sotto l'ipotesi adottata

$$a=b\cos C+c\cos B\ldots\ldots\ a=b\cos C'+c\cos B'.$$

La differenza di queste due equazioni darà

$$b(\cos C-\cos C')+c(\cos B-\cos B')=0$$

la quale, trattandosi di quantità indeterminate, ha luogo solamente coll'ipotesi di $\cos C=\cos C'$, $\cos B=\cos B'$; coiè $C=C'$, $B=B'$ epperò i lati opposti di questo quadrilatero saranno paralleli, onde esso sarà un parallelogrammo. Adunque *se i lati opposti di un quadrilatero sono eguali, esso sarà un parallelogrammo.*

Sia nel quadrilatero $ABA'B'$ (Fig. 13) $BAB'=A$ $BA'B'=A'$, e suppongasi tirata la diagonale BB'. La formola cardinale applicata a'triangoli BAB', $BA'B'$ sotto la condizione adottata darà

$$c=b\cos BAB'+a\cos B\ldots\ldots\ c'=b'\cos BA'B'(=A)+a\cos B'.$$

La differenza darà

$$c-c'-(b-b')\cos BAB'-a(\cos B-\cos B')=0.$$

Se si supponga $c=c'$, $b=b'$, sarà pure $B=B'$, lo che è chiaro (49). E se unita all'ipotesi di $BAB'=BA'B'$ si supponga pure $B=B'$, epperò AB parallela ad $A'B'$ (inversa, 43), sarà pure $b=b'$, $c=c'$. Adunque *sotto le due ipotesi di due angoli opposti eguali e di due lati opposti paralleli, il quadrilatero sarà parallelogrammo.*

Sia $ABA'B'$ (Fig. 13) un parallelogrammo colla sua diagonale BB', sarà $B=B'$, $C=C'$. Adattando la formola fondamentale a' triangoli ABB', $A'BB'$ sotto la condizione adottata, si avrà

$$a=c\cos B+b\cos C\ldots\ldots\ a=c'\cos B+b'\cos C,$$

la cui differenza darà

$$(c-c')\cos B+(b-b')\cos C=0\ldots\ldots(1)$$

Analizziamo questa equazione. In tre modi essa potrebbe aver luogo

1ª $\cos B=\cos C$, $b=b'$, $c=c'$; 2ª $c-c' : b-b'=\cos C : \cos B$; 3ª $c=c'$, $b=b'$. La prima ipotesi, è un caso particolare della 3ª, rispetto alla quale racchiude una condizione di più, cioè $\cos B=\cos C$ che *restringe la condizione di un parallelogrammo qualunque al quadrato e al rombo*, poichè se fosse $B=C$ sarebbe $b=c$, ed essendo $b=b'$, $c=c'$, sarebbero eguali i quattro lati di questo parallelogrammo.

La seconda ipotesi ci guida alla seguente analisi. Sia $c-c'>b-b'$ epperò $c>b+c'-b'\ldots$ (2), sarà $\cos C>\cos B$ cioè $C<B\ldots$ (3). Ciò posto l'inequazione (2) ci dice che $c>b$; infatti essendo $c>b+c'-b'$, maggiormente sarà $c>c'-b'$: facciasi perciò $c'-b'=c-m$; sostituendo questo valore in (2), si avrà $c>b+c-m\ldots$ (4) onde $b<m$: facciasi $b=m-n$, l'inequazione (4) diverrà $c>m-n+c-m$, da cui si ha $n>0$, conseguenza legittima (poichè dipende dalle due condizioni $b<m$, $b=m-n$): adunque dall'equazione (2) deducesi $c>b$: ma questa inequazione non può sussistere coll'altra $C<B$ (52): adunque la

seconda ipotesi è assurda. Rimane allora la terza ipotesi $c=c'$, $b=b'$ che include anche la prima come caso particolare. Dimostrato $b=b'$, $c=c'$, riprendiamo l'equazione cardinale, e modifichiamola dietro le condizioni $B=B'$, $C=C'$ (per ipotesi), $b=b'$, $c=c'$ (per dimostrazione), si avrà

$$b=a\cos C+c\cos BAB' \ldots\ldots\ b=a\cos C+c\cos BA'B'.$$

La differenza darà $c(\cos A-\cos A')=0$ epperò $\cos A=\cos A$ cioè $A=A'$, cioè $BAB'=BA'B'$, e parimenti $ABA'=AB'A'$. Adunque *i lati e gli angoli opposti de' parallelogrammi sono eguali.*

L'equazione (1) cioè $(c-c')\cos B+(b-b')\cos C=0$ darà nell'ipotesi di $b=b'$, $c=c'$ (sola ipotesi ammisibile) $\frac{\cos B}{\cos C}=\frac{0}{0}$; lo che mostra che B potrà essere maggiore eguale o minore di C secondochè sarà $b=c$, $b>c$, $b<c$, ossia che il presente teorema è generale e che appartiene ad ogni parallelogrammo.

(*) 50. Abbiamo poggiata la nozione del parallelismo di due rette sulla impossibilità della loro convergenza: e abbiamo veduto verificarsi questa impossibilità in due rette entrambe perpendicolari ad un'altra. E da questa nozione abbiamo fatte dipendere le proprietà delle parallele. Or nell'idea del parallelismo di due rette è racchiusa l'altra della loro distanza costante, ossia dell'eguaglianza delle perpendicolari tirate fra esse ad una delle due rette (*a*): lo che potrebbe dimostrarsi così per mezzo della nostra formola cardinale. Siano CB', BC' due rette parallele (Fig. 12), e BC, $B'C'$ siano perpendicolari ad una di tali rette, epperò anche all'altra per esser gli angoli interni della stessa parte eguali a due retti, sarà $B=B'=90^\circ$; $A=A'$ (perchè $C'B$, CB' sono parallele), e la formola cardinale darà

$$b=a\cos C+c\cos A;\ b=a'\cos C'+c'\cos A$$

La differenza di queste due equazioni darà

$$a\cos C-a'\cos C'+\cos A(c-c')=0$$

(*a*) Vedi le prime 11 linee della pag. 4 e il n.° 46 *.

questa equazione non può altrimenti verificarsi che mediante l'ipotesi di $a=a'$, $C=C'$, $c=c'$ due delle quali dipendono dall'altra.

Infatti se non fosse $C=C'$, sarà $C \gtrless C'$, aggiungiamo

$B+A=B'+A'$ (essendo per ipotesi $B=B'=90^o$, $A=A'$),

sarà $A+B+C \gtrless A'+B'+C'$, assurdo; epperò $C=C'$ e

quindi $a=a'$, $c=c'$. L'equazione $a=a'$ dimostra che *le perpendicolari innalzate su di una retta, e comprese fra questa e una sua parallela, sono eguali;* epperò *che i triangoli e i parallelogrammi che sono fra le stesse parallele hanno la medesima altezza.*

L'equazione $c=c'$ dimostra inversamente *che sono eguali le parallele comprese tra due rette perpendicolari ad una di esse.*

51. Suppongasi in un triangolo ABC (Fig. 14) tirata una retta $A'C'$ parallela ad AC, sarà $BA'C'=A$, $BC'A'=C$; e indicando respettivamente BA, BC con c, a; e BA', BC' con c', a', la formola fondamentale sotto l'adottata condizione darà

$$a=b\cos C+c\cos B\ldots\ c=a\cos B+b\cos A:$$

Eliminando b sarà

$$a=\cos C\left(\frac{c-a\cos B}{\cos A}\right)+c\cos B,$$

da cui si ha

$$a(\cos A+\cos B\cos C)=c(\cos C+\cos A\cos B);\ \text{epperò}$$

$$\frac{a}{c}=\frac{\cos C+\cos A\cos B}{\cos A+\cos B\cos C}.$$

Applicata questa formola al triangolo $A'BC'$ sotto la condizione di $A=A'$, $C=C'$ e B di comune, si avrà

$$\frac{a'}{c'}=\frac{\cos C+\cos A\cos B}{\cos A+\cos B\cos C};\ \text{cioè}\ \frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}.$$

Sia inversamente $\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}$; sarà

$$\frac{\cos C+\cos A\cos B}{\cos A+\cos B\cos C}=\frac{\cos C'+\cos A'\cos B}{\cos A'+\cos B\cos C'},$$

la quale equazione reggendo tra quantità indeterminate sotto la sola condizione di $A+B+C=A'+B'+C'=180$, non può altrimenti reggere che coll'ipotesi di $A=A'$, $C=C'$ epperò di $A'C'$ parallela ad AC.

Sicchè *se in un triangolo si tira una retta parallela ad un lato, gli altri lati rimarranno divisi proporzionalmente, e reciprocamente.*

Segue da questo teorema che se si tirino nel triangolo ABC varie rette $A'C'$, DE... parallele ad AC, c, da' punti C', E... si tirino le rette $C'R$, EN... parallele a BA, sarà

$$BA' : A'D=BC' : C'E;\ C'm : mR=C'E : EC;\ \text{ossia}$$
$$BA' : A'D=BC' : C'E;\ A'D : DA=C'E : EC\ldots$$

Epperò *se due lati di un triangolo sono divisi da varie rette parallele al terzo lato, saranno divisi proporzionalmente.*

(*) La proporzione $c' : a'=c : BC$ dà $BC=\frac{a'c}{c'}$: lo che dimostra *che una frazione il cui numeratore ha un fattore di più del denominatore esprime una linea retta.*

52. Vediamo che relazioni esistano ne' triangoli tra' i lati e gli angoli opposti. Sia sulle prime $a=b$ in un triangolo isoscele, e i lati opposti rispettivamente a questi lati siano A, B, avremo le due equazioni

$$a=b\cos C+c\cos B,\quad b=a\cos C+c\cos A:$$

Eliminando $\cos C$; si avrà

$$\frac{a-c\cos B}{b}=\frac{b-c\cos A}{a};\ \text{cioè, per essere } a=b$$

$$\frac{a-c\cos B}{a}=\frac{a-c\cos A}{a};\ \text{onde } A=B\ (\text{vedi n.}^{\circ}\ 21):$$

Cioè *in un triangolo gli angoli opposti a' lati eguali sono eguali.*

Dunque 1° *In ogni triangolo rettangolo isoscele, ciascheduno degli angoli acuti è mezzo retto* (29): 2° *Il triangolo equilatero è anche equiangolo, e ogni angolo è perciò due terzi di un retto* (30).

Sia inversamente $A=B$; eliminando c per mezzo delle due equazioni.

$a=b\cos C+c\cos B\ldots\ldots\ b=a\cos C+c\cos A$, avremo

$\frac{a-b\cos C}{\cos B}=\frac{b-a\cos C}{\cos A}$, le quali due equazioni per essere $A=B$, daranno

$$a(1+\cos C)=b(1+\cos C),\ \text{cioè}\ a=b.$$

Epperò *in ogni triangolo i lati opposti agli angoli eguali sono eguali: onde un triangolo equiangolo è anche equilatero.*

Sia ora $a>b$; eliminando $\cos C$ per mezzo delle due equazioni

$a=b\cos C+c\cos B$; $b=a\cos C+c\cos A$; si avrà

$a(a-c\cos B)=b(b-c\cos A)$; epperò essendo $a>b$ sarà

$a-c\cos B<b-c\cos A$, e tanto più $-c\cos B<-c\cos A$; cioè

$\cos A<\cos B$, e $A>B$. Cioè in ogni triangolo *l'angolo opposto al lato maggiore è maggiore dell'angolo opposto al lato minore.*

Sia ora $A>B$; eliminando c per mezzo delle due equazioni

$a=b\cos C+c\cos B$; $b=a\cos C+c\cos A$; si avrà

$\cos A(a-b\cos C)=\cos B(b-a\cos C)$: ma per l'ipotesi fatta è

$\cos A<\cos B$; adunque $a-b\cos C>b-a\cos C$; cioè

$a(1+\cos C)>b(1+\cos C)$, ossia $a>b$. Cioè *in ogni triangolo il lato opposto all'angolo maggiore è maggiore del lato opposto al minore angolo.*

53. Sia CBC' (Fig. 15) un triangolo e dal vertice B tirisi a piacere la BA sulla base; indicando BC, BC' con a, a' rispettivamente; AC, AC' con b, b'; e BA con c, avremo

$b=a\cos C+c\cos A\ldots$ (1)... $b'=a'\cos C'+c\cos A'\ldots$ (2)

$a=b\cos C+c\cos B\ldots$ (3)... $a'=b'\cos C'+c\cos B'\ldots$ (4)

1° Supponiamo in primo luogo $a=a'$ epperò $C=C'$, la differenza di (1) e (2) darà

$$b-b'=c(\cos A-\cos A').$$

L'ipotesi di $b=b'$ darà $\cos A=\cos A'$, e per esser A, A' conseguenti sarà $A=A'=90°$: e l'ipotesi di $A=90=A'$ darà $b=b'$: E le altre equazioni ((3) e (4)) daranno perciò $B=B'$.

Adunque *se da un punto si tirino su di una retta due obblique eguali ed un'altra retta comunque tra esse, se le due obblique distano egualmente dal piede di questa terza retta, questa sarà perpendicolare alla base e inversamente, le obblique faranno con questa angoli eguali.*

2° Supponiamo in (3) e (4) $a=a'$; epperò $C=C'$ e di più $B=B'$: esse daranno $\cos C(b-b')=0$ epperò $b=b'$; e con questo valore l'equazioni (1) e (2) daranno $\cos A=\cos A'$, epperò $A=A'=90$ (come angoli conseguenti).

Epperò *la retta che divide l'angolo di un triangolo isoscele per metà, dividerà la base per metà e ad angoli retti.*

3° Sia $b=b'$ l'equazioni (1) e (2) daranno

$$a\cos C-a'\cos C'+c(\cos A-\cos A')=0$$

Se supponiamo $a=a'$ e quindi $C=C'$, sarà $A=A'=90$ (come angoli conseguenti); e se supponiamo $A=A'=90°$, sarà $a=a'$, $C=C'$. In questo caso l'equazioni (3) e (4) daranno $B=B'$.

Adunque *se dalla metà di una retta si tiri un'altra in modo che un altro suo punto dista egualmente dagli estremi di essa, questa sarà perpendicolare alla retta stessa e reciprocamente; e gli angoli che farà questa perpendicolare colle due obblique saranno eguali.*

Sicchè la retta che passa per due punti egualmente distanti dagli estremi di un'altra è a questa perpendicolare e la divide per metà.

Supponiamo $B=B'$, $C=C'$ epperò $a=a'$ l'equazioni (3) e (4) daranno

$$b\cos C=b'\cos C;\ \text{cioè}\ b=b'$$

Epperò l'equazioni (1) e (2) daranno

$$c\cos A = c\cos A'; \text{ epperò } A = A' = 90.$$

Adunque *se da un punto si tirino due obblique su di una retta e un'altra fra queste obblique; se le obblique faranno angoli eguali con questa e colla retta sulla quale cadono, saranno egualmente distanti dal piede della terza retta la quale sarà perpendicolare alla data retta.*

Dal punto B (Fig. 15) preso fuori di EC s'intenda tirata la perpendicolare BA e varie obblique BE, BC'..., la formola fondamentale adattata a' triangoli rettangoli EBA, $C'BA$ darà

$$c = BE\cos EBA. \ldots\ldots c = BC'\cos C'BA; \text{ epperò sarà}$$

$$BE\cos EBA = BC'\cos C'BA$$

L'ipotesi di $BE > BC'$ dà $\cos EBA < \cos C'BA$; epperò $EBA > C'BA$, cioè $EA > C'A$; l'ipotesi di $EA > C'A$ epperò di $EBA > C'BA$ darà BE maggiore di BC'.

Adunque *se da un punto preso fuori di una retta si tirino una perpendicolare e varie obblique su di questa, l'obbliqua maggiore si allontanerà vieppiù dal piede della perpendicolare, e sarà maggiore l'obbliqua che più si allontana dal piede della perpendicolare.*

Nella proposizione precedente noi abbiamo assunto che per essere $AE > AC'$, era anche l'angolo $EBA > C'BA$ e reciprocamente. Questo è evidente e se ne giudica a vista come nelle prop. 15, 20, 24 ec. del 1° libro degli Elementi Piani di Euclide; ma la seguente dimostrazione dedotta dalla nostra formola cardinale metterà tutto in chiaro.

Suppongasi tirata da B (Fig. 15) la perpendicolare BA su di EC e due obblique diseguali $BE = m$, $BC' = a'$. Essendo $BAC' = 90°$ sarà $BC'A < 90$ (29); epperò $BC'E > 90$ (23); per cui sarà $BEC' < 90$ (30) onde sarà $m > a'$ (52, 2ª parte): dimostreremo che $AE > AC'$; e supponendo $AE > AC'$ dimostreremo $EBA > C'BA$. A tal oggetto i triangoli BAE, BAC' daranno rispettivamente $AE = m\cos E. \ldots\ldots AC' = a'\cos BC'A$: onde

sarà $AE - AC' = m\cos E - a'\cos BC'A$; ma è $m > a'$, e per essere $BC'A > BEC'$ sarà $\cos E > \cos BC'A$; adunque sarà $m\cos E - a'\cos BC'A > 0$; epperò $AE - AC' > 0$; e quindi $AE > AC'$; cioè *l'obbliqua maggiore è più distante della minore del piede della perpendicolare.*

Nella stessa equazione

$$AE - AC' = m\cos E - a'\cos BC'A$$

supponiamo $m = a' \pm n$, essa diverrà

$$AE - AC' = a'(\cos E - \cos BC'A) \pm n'\cos E$$

Se supponiamo $AE > AC'$; il 2° membro di questa equazione sarà assolutamente positivo, lo che esige che sia $\cos E > \cos BC'A$, ossia $E < BC'A$, epperò $EBA > C'BA$.

Essendo (Fig. 15) $c = m\cos EBA$, sarà $m - c = m(1 - \cos EBA)$: ma $1 - \cos EBA$ è essenzialmente positivo; dunque sarà pure $m - c > 0$; epperò sarà $m > c$.

Cioè *la perpendicolare è la minima fra tutte le rette che possono tirarsi da un punto preso fuori di una retta su di essa.*

54. Sia ABC' (Fig. 15) un triangolo rettangolo coll'angolo retto A; abbiamo veduto che la formola cardinale dà

$$b = a\cos C\ (1) \ldots\ldots\ c = a\cos B \ldots (2)$$

E per essere $C = 90 - B$, sarà

$$b = a\,\mathrm{sen}\,B \ldots\ldots (3)\quad c = a\,\mathrm{sen}\,C \ldots (4)$$

dividendo (3) per (2) e (4) per (1) avremo

$$\frac{b}{c} = \mathrm{tang}\,B \ldots (5)\,;\ \frac{c}{b} = \mathrm{tang}\,C \ldots (6)$$

L'equazione (1 e 2), (3 e 4), (5 e 6) daranno la risoluzione compiuta de'triangoli rettangoli rettilinei, e si enuncieranno trigonometricamente nel seguente modo:

Un catetto è eguale all'ipotenusa moltiplicata pel coseno dell'angolo adjacente al medesimo.

Un catetto è eguale all'ipotenusa moltiplicata per lo seno dell'angolo opposto ad esso.

Un catetto è eguale all' altro catetto moltiplicato per la tangente dell' angolo acuto adjacente al medesimo.

Sia ABC (Fig. 16) un triangolo rettangolo in B, e suppongasi dal vertice B dell' angolo retto abbassata la perpendicolare sull' ipotenusa AC. Facciasi $AD=b'$, $DC=b$, la perpendicolare $BD=m$, $BC=a$, $BA=c$; avremo

$$b'=c\cos A \ldots\ldots (1) \ldots\ldots (b+b')\cos A=c \ldots\ldots (2)$$
$$b=a\cos C \ldots\ldots (3) \ldots\ldots (b+b')\cos C=a \ldots\ldots (4)$$
$$m=b'\operatorname{tang} A \ldots\ldots (5) \ldots\ldots m=b\operatorname{tang} C \ldots\ldots\ldots (6)$$

I prodotti di (1) e (2); (3) e (4); (5) e (6) daranno rispettivamente

$$b'(b+b')=c^2 \ldots (7); \quad b(b+b')=a^2 \ldots (8)$$
$$m^2=bb'\operatorname{tang} A\operatorname{tang} C=bb'\operatorname{tang} A\cot A=bb' \ldots (9)$$

L'equazioni (7), (8), si enunciano così.

Se dal vertice dell' angolo retto di un triangolo rettangolo si abbassa la perpendicolare sulla ipotenusa, ogni catetto è medio proporzionale tra l' ipotenusa e il segmento adjacente tagliato dalla perpendicolare.

L'equazione (9) ha la seguente enunziazione.

La perpendicolare predetta è media proporzionale tra' segmenti dell' ipotenusa.

Di più *saranno simili i tre triangoli rettangoli ABC, ABD, CBD; giacchè i due primi, oltre l' angolo retto hanno l' angolo acuto A di comune; il primo e'l terzo hanno l' angolo acuto C di comune, oltre dell' angolo retto: e finalmente il secondo e terzo hanno i lati omologhi proporzionali intorno all' angolo retto.*

55. Eliminiamo $\cos A$ per mezzo delle due formole cardinali

$$b=a\cos C+c\cos A \ldots\ldots c=a\cos B+b\cos A, \text{ avremo}$$

$$b^2-ab\cos C+ac\cos B-c^2=0, \text{ ossia } a=\frac{b^2-c^2}{b\cos C-c\cos B};$$

ma la terza formola cardinale è

$$a=b\cos C+c\cos B;$$

sicchè eliminando a colla precedente, sarà

$$b^2\cos^2 C - c^2\cos^2 B = b^2 - c^2;\ \text{ossia}$$
$$b^2(1-\cos^2 C) - c^2(1-\cos^2 B) = 0;\ \text{ossia}$$
$$b\,\text{sen}\,C = c\,\text{sen}\,B;\ \text{e generalizzando avremo}$$
$$a\,\text{sen}\,B = b\,\text{sen}\,A;\ a\,\text{sen}\,C = c\,\text{sen}\,A;\ b\,\text{sen}\,C = c\,\text{sen}\,B$$

la cui enunciazione è che ne' *triangoli rettilinei i seni degli angoli sono come i lati opposti.*

Queste formole dimostrano intuitivamente i teoremi del rapporto ch'esiste tra'lati e gli angoli di un triangolo.

56. Supponiamo che tra'lati di un triangolo rettilineo esista una relazione $a^2 = b^2 + c^2$.

Si elevi a quadrato l'equazione fondamentale
$c\cos A = b - a\cos C$; si avrà $c^2\cos^2 A = b^2 - 2ab\cos C + a^2\cos^2 C$... (1)
Sostituendo in (1) $1 - \text{sen}^2$ a $\cos^2$, avremo

$$c^2(1-\text{sen}^2 A) = b^2 - 2ab\cos C + a^2 - a^2\,\text{sen}^2 C)\ldots\ (2)$$

Sostituendo in (2) $b^2 + c^2$ al solo termine a^2 (ipotesi), e riducendo sarà

$$c^2\,\text{sen}^2 A = 2ab\cos C + a^2\,\text{sen}^2 C - 2b^2,$$

Sostituendo $c^2\,\text{sen}^2 A$ ad $a^2\,\text{sen}^2 C$ e riducendo sarà

$$ab\cos C = b^2,\ \text{da cui si ha}\ \cos C = \frac{b}{a}.$$

Sostituendo questo valore in (1), si avrà

$$c^2\cos^2 A = b^2 - 2b^2 + b^2;\ \text{epperò}\ \cos A = 0,\ \text{ossia}\ A = 90^\circ.$$

Cioè *se il quadrato di un lato di un triangolo rettilineo è eguale alla somma de' quadrati degli altri due lati, l'angolo da questi compreso sarà retto.*

57. Dagli estremi A, C (Fig. 17) di un lato del triangolo ABC si tirino due altre rette comunque AB', $B'C$; AB'', $B''C$; AB''', $B'''C$; e s'indichino con A, C gli angoli BAC, BCA, e con A', B', C' gli angoli $B'AC$, $AB'C$, $B'CA$, e i lati rispettivi opposti a questi

angoli colle lettere piccole simili: la formola fondamentale applicata a'due triangoli ABC, $AB'C$ dà

$$a = b\cos C + c\cos B \ldots\ldots \quad c = a\cos B + b\cos A$$
$$a' = b'\cos C' + c'\cos B' \ldots\ldots \quad c' = a'\cos B' + b'\cos A'$$

Sommando ciascheduna coppia in ordine, sarà

$$a + c = (a + c)\cos B + b(\cos A + \cos C)$$
$$a' + c' = (a' + c')\cos B' + b'(\cos A' + \cos C')$$

dalle quali si ha

$$\left.\begin{aligned} 1 - \cos B &= \frac{b}{a + c}(\cos A + \cos C) \\ 1 - \cos B' &= \frac{b}{a' + c'}(\cos A' + \cos C') \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (K)$$

Analizziamo l'equazioni (K). Potrebbe supporsi $B' > B$; lo che si vede chiaramente ne'triangoli $AB'C$, $AB''C$, ne'quali B' rappresenta l'angolo $AB'C$ o l'altro $AB''C$ rispettivamente; poichè ne'triangoli $AB'C$, ABC è $B'AC < BAC$; $B'CA < BCA$; adunque risulterà $B' > B$; e ne'triangoli $AB''C$, ABC è $B''AC = BAC$; $B''CA < BCA$; adunque sarà $B''AC + B''CA < BAC + BCA$: epperò risulterà $AB''C > B$. Per riguardo poi al triangolo $AB'''C$, potrebbe anche verificarsi $B''' > B$; ed infatti se fosse $ACB > ABC$, supponendo $BCL = LBC$; e AB''' parallela a CB, e tirata una retta $CB''B'''$ per C e B'' preso fra A e L, risulterebbe evidentemente $B''' > B$; poichè è $B'''AB'' = B''BC$, e $B'''B''A = BB''C$; sicchè sarà $AB'''B'' = B''CB$; ma è $B''CB > LCB$ ossia $> B$; adunque sarà $B''' > B$. Ciò posto nel triangolo $AB'C$, l'angolo $B'AC$ sarà rappresentato da A', e $B'CA$ da C' e i lati $B'C$, $B'A$ ad essi opposti rispettivamente saranno a', b'; gli stessi angoli A', C' della 2ª formola (K) rappresenteranno rispettivamente gli angoli CAB'', e ACB'' nel triangolo $AB''C$; e gli angoli CAB''', e ACB''' nel triangolo $AB'''C$, e i lati a', b' saranno i rispettivi lati opposti a questi angoli. Premesso ciò ritorniamo alla formola (K) nella quale è $B' > B$ (dinotando con B' l'angolo $AB'C$, o l'altro $AB''C$, o

l'angolo B''', secondo che si riferisce o all'uno o all'altro de' triangoli $AB'C$, $AB''C$, $AB'''C$; sarà
$\cos B' < \cos B$; epperò $1 - \cos B < 1 - \cos B'$; sicchè sarà pure

$$\frac{b}{a+c}(\cos A + \cos C) < \frac{b}{a'+c'}(\cos A' + \cos C'); \text{ da cui si ha}$$

$$1 < \frac{a+c}{a'+c'} \cdot \frac{\cos A' + \cos C'}{\cos A + \cos C}$$

equazione che per lo principio degli omogenei rimarrà verificata da $a+c > a'+c'$; $\cos A' + \cos C' > \cos A + \cos C$. Adunque *se varii triangoli poggiano sulla stessa base, gli angoli maggiori saranno contenuti da una somma di lati minori.*

Inversamente se supponiamo $a+c > a'+c'$, sarà

$$\frac{b}{a+c} < \frac{b}{a'+c'}; \text{ epperò } \frac{1-\cos B}{\cos A + \cos C} < \frac{1-\cos B'}{\cos A' + \cos C'};$$ inequazione che darà $\cos B > \cos B'$, cioè $B' > B$; epperò

$$\cos A + \cos C < \cos A' + \cos C'.$$

58. Sia (Fig. 13) $ABA'B'$ un parallelogrammo in cui si tirino le diagonali AA', BB' che seghinsi in M; sarà
$b = b'$, $A = A' = C = C'$: epperò la formola cardinale adattata a' triangoli AMB', $A'MB$ sotto le adottate ipotesi, diverrà
$b = AM\cos A + B'M\cos C \ldots\ldots$ $b = A'M\cos A + BM\cos C$:
la sottrazione darà

$$\cos A(AM - A'M) + \cos C(B'M - BM) = 0$$

Non potendo essere $\cos A = 0$, $\cos C = 0$, perchè sarebbe $A = 90$, $C = 90$ (assurdo), sarà $AM = A'M$, $BM = B'M$. Epperò *le diagonali di un parallelogrammo si dividono per metà al punto d'incontro.*

Per lo punto (Fig. 19) C medio delle due diagonali di un parallelogrammo si tiri una retta qualunque mCn; sarà (form. card.)

$$mB = CB\cos CBm + Cm\cos CmB \ldots nB' = CB'\cos CB'n + Cn\cos CnB';$$

ma $mBC = nB'C$, $BmC = B'nC$, $CB = CB'$; adunque le due precedenti equazioni diverranno

$$mB = CB\cos CBm + Cm\cos CmB \ldots nB' = CB\cos CBm + Cn\cos CmB.$$

La differenza darà $mB - nB' = \cos CmB(Cm - Cn)$; equazione che porta alla conseguenza $mB = nB'$, $Cm = Cn$. Cioè *se per lo punto d'incontro delle diagonali di un parallelogrammo si tiri comunque una retta fino all'incontro de' lati opposti, questa retta rimarrà divisa per metà allo stesso punto d'incontro, e i punti ne' quali taglia i lati opposti saranno egualmente distanti dagli angoli opposti del parallelogrammo.*

Supponiamo (Fig. 19) che le due rette AA', BB' diseguali si dividano per metà in C, cioè che sia $CB = CB'$, $CA = CA'$ e si suppongano unite AB, $A'B'$, AB', BA': i triangoli BCA, $B'CA'$ daranno $b = c\cos A + a\cos C$; $b = c'\cos A' + a\cos C$. La differenza darà $c\cos A - c'\cos A' = 0 \ldots$ (h). Come altre volte abbiamo osservato se potesse essere $c \gtrless c'$, sarà $\cos A \lessgtr \cos A'$, epperò $A \gtrless A'$: similmente dimostreremo per via delle due equazioni $a = c\cos B + b\cos C$, $a = c'\cos B' + b\cos C$ che nelle stesse circostanze di $A \gtrless A'$ sarà anche $B \gtrless B'$, onde si avrà o $A + B > A' + B'$; o $A + B < A' + B'$; epperò aggiungendo di comune C si avvererebbe uno de' seguenti assurdi

$$A + B + C > A' + B' + C;\ A + B + C < A' + B' + C$$

onde l'equazione (h) non può avere altrimenti luogo che supponendo $c = c'$, $A = A'$; quindi sarà AB eguale o parallela ad $A'B'$; e la figura $AB\ A'B'$ sarà un *parallelogrammo*. Adunque *se due rette si tagliano per metà la figura che risulterà coll'unire i loro estremi sarà un parallelogrammo.*

59. Osserviamo ora quali sono le condizioni perchè questo parallelogrammo sia rombo, romboide, rettangolo o quadrato. A tal oggetto (Fig. 19) siano sulle prime AA', BB' due rette qualunque

che si tagliano per metà in C: applicando l'equazione fondamentale a'due triangoli BCA, BCA' sotto le condizioni $CA'=CA$, $BA'C=CAB'$, $BCA'=180-BCA$, si avrà

$$AC=BA\cos BAC+BC\cos BCA.....$$
$$A'C=AC=BA'\cos BA'C-BC\cos BCA.$$

Sottraendo si avrà

$$BA\cos BAC-BA'\cos BA'C+2BC\cos BCA=0... \quad (h)$$

In due modi può verificarsi questa equazione, 1° $BA=BA'$, epperò $BAC=BA'C$; e $\cos BCA=0$ cioè $BCA=90$;

2° $BCA=90°$, cioè $\cos BCA=0$ epperò $BA=BA'$, cioè $\cos BAC=\cos BA'C$.

La prima ipotesi ci dice che *nel rombo l'angolo delle diagonali è retto:* e la 2ª che *se in un parallelogrammo obbliquangolo l'angolo delle diagonali è retto, esso sarà rombo.*

Supponiamo in secondo luogo BA, BA' diseguali, l'equazione (h) potrebbe verificare $\cos BCA=0$ cioè $BCA=90$ nel solo caso che fosse $BA : BA'=\cos BA'C : \cos BAC$; ma questa proporzione è assurda; poichè supponendo $BA>$ o $<$ di BA', sarebbe $BA'C<$ o $>$ di BAC, assurdo (52 2ª parte); adunque non può essere $\cos BCA=0$. E reciprocamente se non è $\cos BCA=0$ non può esser neppure $BA=BA'$. Adunque generalmente *se due rette diseguali si tagliano scambievolmente per metà, unendo gli estremi, si avrà un rombo se si tagliano ad angolo retto e un romboide se si tagliano ad angolo obbliquo, e inversamente.*

Supponiamo ora AA', BB' eguali, epperò eguali le loro rispettive metà CA, CB; sarà $CBA=CAB$, che indicheremo rispettivamente con $A=B$; l'equazione fondamentale applicata al triangolo ACB darà

$$c=a\cos B+b\cos A=2a\cos B=2b\cos A.$$

Dippiù il triangolo BAB' dà

$$c=2a\cos B+AB'\cos BAB':$$

eliminando c tra queste due equazioni si avrà

$$2a\cos B = 2a\cos B + AB'\cos BAB'; \text{ epperò } \cos BAB' = 0$$

cioè $BAB' = 90$: sicchè il parallelogrammo $AB\ A'B'$ sarà rettangolo o quadrato.

Vediamo quando è un semplice rettangolo e quando un quadrato. A tal oggetto riteniamo l'ipotesi di $CB = CA$ ossia di $a = b$ epperò $A = B$. I triangoli BCA, $B'CA$, sotto la condizione di $BCA' = 180 - BCA$, daranno rispettivamente

$$BC = a = c\cos B + b\cos C \ldots\ b = a = -b\cos C + AB'\cos CAB'$$

La differenza darà $2b\cos C + c\cos B - AB'\cos CAB' = 0$

Se si suppone $c = AB = AB'$ epperò $A = CAB'$ (*a*) ossia $CAB = CAB'$ si avrà $\cos C = 0$ e $C = 90$; se poi non è $AB = AB'$ l'angolo C non potrà esser retto.

Adunque *se due rette eguali s'intersegano ne' loro punti medii, il parallelogrammo che ne risulterà unendo i punti estremi sarà quadrato o rettangolo, secondo che s'incontreranno ad angolo retto o pure obbliquo.*

Possiamo anche dimostrare facilmente le inverse delle proposizioni precedenti (59); cioè che nel rombo e nel romboide le diagonali non sono eguali, e che lo sono nel rettangolo e nel quadrato. Infatti (Fig. 19) i due triangoli BCA, BAB' danno rispettivamente (equaz. card.)

$$c = a\cos B + b\cos A \ldots\ c = 2a\cos B + AB'\cos BAB';$$

la differenza di questa darà

$$a\cos B + AB'\cos BAB' - b\cos A = 0 \ldots\ldots (M)$$

Se BAB' è retto, sarà $a\cos B = b\cos A$; la quale potrà aver luogo in due casi 1° $a = b$, 2° $\cos A = \cos B$, una delle quali condizioni dipende dall'altra (52); $a : b = \cos A : \cos B$: questa proporzione è assurda, poichè nell'ipotesi $a \gtrless b$ dà $A \lessgtr b$; adunque è

(*a*) Essendo $AB = AB'$ e $BAB' = 90$, il parallelogrammo sarà quadrato onde la diagonale AA' dividerà per metà l'angolo BAB' (34).

$a=b$, epperò $A=A$: dunque *nel quadrato e nel rettangolo le diagonali sono eguali.*

Se poi non è $BAB'=90$, non può avverarsi nell'equazione (M) $a=b$; *lo che mostra che nel rombo e nel romboide le diagonali sono diseguali.*

60. Abbiamo dimostrate le relazioni ch'esistono tra'lati e gli angoli opposti de'triangoli quando hanno, 1° un angolo eguale compreso fra due lati rispettivamente eguali; 2° due angoli eguali adjacenti ad un lato eguale; 3° due angoli eguali e eguale un lato opposto ad uno di essi. Andiamo a considerare queste relazioni sotto l'aspetto più generale. A tal oggetto analizziamo le seguenti due formole dell'equazione fondamentale

$$b=a\cos C+c\cos A. \ldots\ldots c=a\cos B+b\cos A$$

Moltiplicando la prima per b e la seconda per c e sottraendo si avrà

$$b^2-c^2=ab\cos C-ac\cos B.$$

Si moltiplichi per a l'equazione $a=b\cos C+c\cos B$ e'l prodotto si sommi colla precedente si avrà

(1) $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$; e per simmetria
(2) $a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$
(3) $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$ (a)

Prendiamo una di quest'equazioni, per es. la terza e facciamo variare l'angolo ch'essa contiene e'l lato opposto, avremo

$$(4)\ b^2+c^2-a'^2=2bc\cos A'$$

Nell'equazioni (3) e (4) se supponiamo $a=a'$, risulterà $A=A'$ e reciprocamente: se poi supponiamo $a>a'$, sarà

$b^2+c^2-a^2<b^2+c^2-a'^2$, epperò $\cos A<\cos A'$ cioè $A>A'$.

(a) Queste formole si hanno parimente sostituendo il valore di $\cos B=\dfrac{a-b\cos C}{a}$ in $\cos A=\dfrac{c-a\cos B}{b}$; ed eliminando $\cos C$ per mezzo di $\cos C=\dfrac{b-c\cos A}{a}$.

E se reciprocamente supponiamo $A > A'$, sarà $\cos A < \cos A'$ epperò

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos A > b^2 + c^2 - 2bc\cos A' \text{ cioè } a > a'.$$

Si deducono dunque dall'equazioni (3) e (4) intuitivamente le verità enunciate dalle proposizioni 4, 8, 24, 25 del 1° libro degli Elementi di Euclide.

(*) Ma sarà più utile il trattare direttamente l'equazione fondamentale sotto le condizioni $a = a'$, $b = b'$, $C > C'$ per delle utili riflessioni alle quali dà luogo, come lo abbiamo fatto per $a = a'$, $b = b'$ $C = C'$. Avremo dunque dietro l'ipotesi adottata

$$a = b\cos C + c\cos B \ldots \quad a = b\cos C' + c'\cos B';$$
$$b = a\cos C + c\cos A \ldots \quad b = a\cos C' + c'\cos A'$$

Eliminando a, b, successivamente, avremo

$$\cos C - \cos C' = \frac{c'}{b}\cos B' - \frac{c}{b}\cos B \ldots,$$

$$\cos C - \cos C' = \frac{c'}{a}\cos A' - \frac{c}{a}\cos A;$$

ma è per ipotesi $\cos C - \cos C' < 0$; adunque sarà parimente

$$\frac{c'}{a}\cos A' < \frac{c}{a}\cos A \ldots \quad \frac{c'}{b}\cos B' < \frac{c}{b}\cos B \ldots. \quad (M).$$

L'ipotesi di $C > C'$ esclude la simultanea esistenza delle seguenti due altre ipotesi

1ª $\cos A' = \cos A$, $\cos B' = \cos B$; 2ª $\cos A' > \cos A$, $\cos B' > \cos B$: Poichè la prima darebbe $A = A'$, $B = B'$; e la seconda $A > A'$, $B > B'$, risultati entrambi assurdi; poichè essendo $C > C'$, sarebbe in entrambi i casi $A + B + C > A' + B' + C'$ (assurdo). Al contrario sono ammissibili le seguenti ipotesi coll'altra $C > C'$;

3ª $\cos A' < \cos A$, $\cos B' < \cos B$; 4ª $\cos A' \overset{=}{>} \cos A$, $\cos B' < \cos B$;

poichè la 3ª dà $A' > A$, $B' > B$, e la 4ª $A' \overset{=}{<} A$, $B' > B$, le quali combinate con $C' < C$ possono soddisfare alla condizione

$A+B+C=A'+B'+C'=180$. Adunque fa uopo che un angolo almeno A' o B' sia maggiore del suo corrispondente A o B. Supponiamo dunque $B'>B$, potendo essere A' maggiore eguale o minore di A. In tal caso nella seconda equazione (M) sarà

$\cos B'<\cos B$, ed essendo indeterminate B, B', sarà $\frac{c'}{b}<\frac{c}{b}$, epperò $c>c'$. In fatti le due equazioni (M) avendo luogo nel tempo stesso e potendo essere $\cos A'=\cos A$, o $\cos A'>\cos A$, l'equazione $\frac{c'}{a}\cos A'<\frac{c}{a}\cos A$ considerata numericamente non può avere altrimenti luogo insieme colla possibilità delle due precedenti condizioni che colla sola ipotesi di $c>c'$.

L'equazioni (1), (2) e (3) (60) si enunciano, *il coseno dell'angolo di un triangolo è eguale al rapporto della somma de' quadrati de' lati che lo comprendono diminuito del quadrato del lato opposto al doppio prodotto degli stessi lati che lo comprendono.*

61. Siano b, c i due lati di un parallelogrammo contigui all'angolo A; e b', c', A' i corrispondenti lati e angolo di un altro parallelogrammo. Tra queste quantità esista la condizione $\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}$, $A=A'$; sarà $C=C'$, $B=B'$ (44); e l'equazione cardinale con queste condizioni adattata a' triangoli risultanti da' lati e dalle diagonali di questi parallelogrammi diverrà

$$(K)\ldots\ b=a\cos C+c\cos A,\quad b'=a'\cos C+c'\cos A.$$

Dividendo la prima per c e la seconda per c', si avrà

$$\frac{b}{c}=\frac{a}{c}\cos C+\cos A\ldots\ldots\ \frac{b}{c}=\frac{a'}{c'}\cos C+\cos A$$

La differenza da $\left(\frac{a}{c}-\frac{a'}{c'}\right)\cos C=0$; epperò $\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}\ldots\ (1)$:

dividiamo la prima dell'equazioni (K) per b e la seconda per b', sarà

$$1=\frac{a}{b}\cos C+\frac{c}{b}\cos A\ldots\ldots,\quad 1=\frac{a'}{b'}\cos C+\frac{c'}{b'}\cos A:$$

Essendo $\frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}$ per ipotesi, la differenza darà

$\left(\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}\right)\cos C=0$; epperò sarà $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b}$. . . (2). Eliminando a tra (1) e (2), risulterà $\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

Adunque saranno prôporzionali i lati de' parallelogrammi predetti: ma essi sono pure equiangoli per lo parallelismo de' lati opposto. Adunque *se due parallelogrammi hanno un angolo eguale fra due lati proporzionali, sono simili.*

Epperò (Fig. 20) se si prende nella diagonale del parallelogrammo AA' un punto m da cui s'intendano tirate le mb, mc rispettivamente parallele a' lati del parallelogrammo il nuovo parallelogrammo bc intorno alla stessa diagonale avrà $Bbm=BAB'$ e $Bb : bm=BA : AB'$. Cioè *sono simili i parallelogrammi che sono intorno una stessa diagonale.*

Siano simili i due parallelogrammi AA', bc e abbiano l'angolo in B di comune: facciasi $Bb=b'$, $BA=b$, $bm=c'$, $AB'=c$ epperò per l'ipotesi $\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}$; sia $ABB'=C$; $bBm=C'$; $BAB'=A$, $Bbm=A'$, $BB=a$, $Bm=a'$, sarà

$$b=c\cos A+a\cos C. \ldots\ldots b'=c'\cos A'+a'\cos C':$$

dividendo la prima per a e la seconda per c', si avrà

$$\frac{b}{c}=\cos A+\frac{a}{c}\cos C. \ldots\ldots \frac{b'}{c'}=\cos A'+\frac{a'}{c'}\cos C';$$

ma è per ipotesi $\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}$; adunque sarà

$$\cos A+\frac{a}{c}\cos C=\cos A'+\frac{a'}{c'}\cos C';$$

Ed essendo A, A', C, C' delle quantità indeterminate, sarà

$$\cos A=\cos A', \frac{a}{c}=\frac{a'}{c'} \text{ e } \cos C=\cos C',$$

quest'ultima dà $C=C'$ ossia $bBm=ABB'$; onde le diagonali Bm, BB' coincideranno. Epperò *i parallelogrammi simili che hanno un angolo comune sono intorno alla medesima diagonale.*

62. Adattando (Fig. 13) la formola $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ (59) a'triangoli formati dalle diagonali AA', BB del parallelogrammo e innestandovi la condizione di $b=b'$, $c=c'$, $Am=mA'$, $Bm=mB'$, $\cos AmB'=\cos BmA'=-\cos AmB=-\cos B'mA'$, si avrà

$$2c^2=2Am^2+2Bm^2+2Am \text{ in } mB\cos AmB$$
$$2b^2=2Am^2+2Bm^2-2Am \text{ in } mB\cos AmB. \text{ Sommando}$$

$AB^2+BA'^2+A'B'^2+B'A^2=4Am^2+4Bm^2=(2Am)^2+(2Bm)^2=$ $=AA'^2+BB'^2$. Cioè *la somma de' quadrati de' lati di un parallelogrammo è eguale alla somma de' quadrati delle diagonali.*

63. Intendasi (Fig. 21) diviso per metà l'angolo C di un triangolo $A'CA$ colla retta CB, ne sorgeranno due triangoli BCA', BCA, i cui angoli saranno rispettivamente $\frac{C}{2}$, A, B co'lati opposti c, a, b, e $\frac{C}{2}$, A', e $B'=180-B$ co'lati opposti c', a, b'.

La formola fondamentale applicata a questi triangoli sotto le condizioni precedenti darà

$$a=b\cos\frac{C}{2}+c\cos B. \;.\;.\;.\;.\; a=b'\cos\frac{C}{2}-c'\cos B';$$

e abbiamo posto — avanti $c'\cos B'$ per notare che c' è preso diametralmente opposta a c: or è $\cos B'=-\cos B$ perchè $B'=180-B$; adunque le due precedenti equazioni saranno

$$a=b\cos\frac{C}{2}+c\cos B. \;.\;.\;.\;.\; a=b'\cos\frac{C}{2}+c'\cos B.$$

Eliminando a sarà $b\cos\frac{C}{2}-b'\cos\frac{C}{2}+c\cos B-c'\cos B=0$ (h)

Non potendo essere insieme $\cos\frac{C}{2}=0$, $\cos B=0$; poichè ne

verrebbe l'assurdo $\frac{C}{2}=90$, $B=90$, l'equazione (h), in due modi potrà verificarsi questa equazione;

$$1^o \text{ o } b=b',\ c=c';\ 2^o\ b\cos\frac{C}{2}+c\cos B=0;\ b'\cos\frac{C}{2}+c'\cos B=0$$

La prima condizione non è ammissibile che nel solo caso del triangolo isoscele; epperò non può essere adottata sotto l'ipotesi in tesi in cui il triangolo è un triangolo qualunque. Adunque non potremo ammettere che l'altra condizione, cioè

$$b\cos\frac{C}{2}+c\cos B=0;\ b'\cos\frac{C}{2}+c\cos B=0$$

le quali danno

$$\frac{b}{c}=-\frac{\cos B}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{b'}{c'};\ \text{cioè } b:b'=c:c'.$$

Cioè *se un angolo di un triangolo si divide per metà, i lati che lo comprendono saranno proporzionali a' segmenti del lat' opposto tagliato dalla retta che divide il detto angolo per metà.*

Supponiamo inversamente che una retta CB tirata da C sul lat'opposto $A\,A'$ divida questo in due segmenti c, c' in modo che sia $\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}$. L'equazione fondamentale applicata a due triangoli ACB, $A'CB'$ sotto la condizione di $B'=180-B$ diverrà

$$(h)\ldots a=b\cos C+c\cos B\ldots\ldots\ b=b'\cos C'-c'\cos B:$$

ma perchè c' è preso in senso opposto a c per rispetto agli angoli B, B', scriveremo questa seconda equazione così $a=b'\cos C'+c'\cos B$. Sottraendo questa equazione dalle prime dell'equazioni (h) si avrà

$$(k)\ldots b\cos C+c\cos B-b'\cos C'-c'\cos B=0.$$

Possiamo mettere l'equazione (k) sotto la seguente forma

$$b\cos C-b'\cos C'+(c-c')\cos B=0.$$

In questa equazione non possiamo generalmente adottare la condizione di $c-c'=0$, o di $\cos B=0$, le quali condizioni hanno luogo nel solo caso del triangolo isoscele o equilatero (53) ne' quali $b=b'$ $c=c'$, $B=B'=90$.

Adunque l'equazione (k) non può avere altrimenti luogo che supponendo $b\cos C+c\cos B=0$, $b'\cos C'+c'\cos B=0$. La prima di queste due equazioni dà $\cos C=-\frac{c}{b}\cos B$; e la seconda $\cos C'=-\frac{c'}{b'}\cos B=-\frac{c}{b}\cos B$ $\left(\text{per l'ipotesi di } \frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}\right)$: adunque sarà $\cos C=\cos C'$, cioè $C=C'$. Cioè *se un lato di un triangolo si divide in due parti proporzionali a' rimanenti lati, la retta che unisce il punto di divisione all'angolo opposto a detto lato dividerà questo angolo per metà.*

(*) Questa proposizione e la precedente si deducono quasi intuitivamente dalla formola $b\,\text{sen}\,C=c\,\text{sen}\,B$ dedotta pure dalla nostra equazione cardinale (55). Infatti i due triangoli ABC, $A'BC$ danno $b\,\text{sen}\,C=c\,\text{sen}\,B$; $b'\,\text{sen}\,C'=c'\,\text{sen}\,B'=\text{sen}\,B$. . . . . ($h$): se supponiamo in quest' equazioni $C=C'$ sarà $b\,\text{sen}\,C=c\,\text{sen}\,B$, $b'\,\text{sen}\,C=c'\,\text{sen}\,B$; epperò $b:b'=c:c'$; e se supponiamo in (h) $b:b'=c:c'$, ossia $b:c=b':c'$, sarà $\text{sen}\,B:\text{sen}\,C=\text{sen}\,B':\text{sen}\,C'$; ond'essendo $\text{sen}\,B=\text{sen}\,B'$, sarà $\text{sen}\,C=\text{sen}\,C'$, cioè $C=C'$.

64. Sia (Fig. 8) BCA un triangolo acutangolo e BCA' ottusangolo in C'; supponendo abbassata la perpendicolare da B su di ACA' (31); si avrà $CD=a\cos C=-a\cos C'$; epperò (23, 59)

$$BA^2=c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-2b \text{ in } CD=$$
$$=BC^2+CA^2-2AC \text{ in } CD;$$

$$BA'^2=c'^2=a^2+b'^2+2ab'\cos C'=a^2+b^2+2b' \text{ in } CD=$$
$$=BC^2+CA'^2+2DC \text{ in } CA'$$

equazioni che danno il rapporto tra' lati opposti ad un angolo acuto, o all'ottuso di un triangolo, per rispetto a' lati che li comprendono e al segmento compreso tra gli stessi angoli e'l piede della perpendicolare abbassata sullo stesso lato adjacente dal vertice dell'angolo opposto.

Supponiamo (Fig. 8) che sia

$$BA^2 = BC^2 + CA^2 - 2AC \text{ in } CD \ldots$$
$$BA'^2 = BC^2 + CA' + 2A'C \text{ in } CD$$

ossia $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \ldots c'^2 = a^2 + b'^2 + 2ab'\cos C'$; queste due equazioni daranno rispettivamente

$$\cos C = \frac{a^2 + b'^2 - c^2}{2ab} \ldots \cos C' = \frac{c'^2 - (a^2 + b^2)}{2ab};$$

ma è $a^2 + b^2 > c^2$ e $c'^2 < (a^2 + b'^2)$: adunque sarà $\cos C > 0$, epperò $C < 90$; $\cos C' < 0$, cioè $C' > 90$ (23) le quali dimostrano la proposizione inversa della precedente, e per rapporto all'angolo acuto e all'ottuso.

Sia nel triangolo ABA' (Fig. 8) C il punto medio di AA', e suppongasi unita BC; suppongasi abbassata da B la perpendicolare BD su di AA', il triangolo BCA sarà acutangolo, e l'altro BCA' ottusangolo in C' (31); epperò sarà $\cos C' = -\cos C$ (23): onde avremo (59)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \ldots\ldots c'^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos C$$

La somma darà

$$c^2 + c'^2 = 2a^2 + 2b^2; \text{ cioè } BA^2 + BA'^2 = 2BC^2 + 2CA^2.$$

Cioè *se dal vertice di un angolo si tiri la retta sulla metà del lato opposto, la somma de' quadrati de' lati che comprendono questo angolo sarà eguale al doppio della somma de' quadrati fatti, uno sulla predetta congiungente e l'altro sulla metà dello stesso lato.*

65. L'equazione fondamentale si ponga sotto la forma

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}\cos C + \cos B:$$

sostituendo $\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}$ ad $\frac{a}{c}$ (55) e $\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}$ a $\frac{b}{c}$, si avrà

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}\cos C + \cos B, \text{ ossia } \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} B\cos C + \operatorname{sen} C\cos B;$$

ma è $\operatorname{sen} A = \operatorname{sen}(B+C)$ (23, 30); adunque sarà

$$\operatorname{sen}(B+C) = \operatorname{sen} B \cos C + \operatorname{sen} C \cos B \ldots (1)$$

Ponendo in questa formola $-C$ per C, e sapendosi che $\operatorname{sen} -C = -\operatorname{sen} C$ (22) si avrà

$$\operatorname{sen}(B-C) = \operatorname{sen} B \cos C - \operatorname{sen} C \cos B \ldots (2)$$

Cioè *il seno della somma o differenza di due angoli o archi è eguale al seno del primo moltiplicato per lo coseno del secondo più o meno il seno del secondo moltiplicato per lo coseno del primo.*

Se l'espressione $\operatorname{sen}(B \pm C)$ si riferirà al raggio r; bisognerà scrivere $r \operatorname{sen}(B \pm C)$ (19); onde sarà

$$(M) \ldots \operatorname{sen}(B \pm C) = \frac{\operatorname{sen} B \cos C \pm \operatorname{sen} C \cos B}{r}.$$

Nella equazione fendamentale $b = a \cos C + c \cos A$ sostituiscasi il valore di c preso dall'altra simile formola $c = b \cos A + a \cos B$; si avrà

$b = a \cos C + \cos A (b \cos A + a \cos B) = a \cos C + b \cos^2 A + a \cos A \cos B$, da cui si ha

$$(1 - \cos^2 A) b = a (\cos C + \cos A \cos A); \text{ ossia}$$

$$\frac{b}{a} \operatorname{sen}^2 A = \cos C + \cos A \cos B \ldots (h)$$

sostituendo $\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$ a $\frac{b}{a}$, e riducendo sarà

$\cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$; ma è
$\cos C = -\cos(A+B)$ (23 e 30); adunque sarà
$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \ldots (3)$

E cambiando B in $-B$, e sapendosi che $\operatorname{sen} -B = -\operatorname{sen} B$; si avrà

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \ldots (4).$$

Cioè *il coseno della somma o differenza di due archi è eguale al prodotto de' coseni meno o più il prodotto de' seni.*

Se il raggio invece di 1 fosse r, si avrà

$$r\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B;$$ epperò

$$(N) \ldots \cos(A \pm B) = \frac{\cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{r}$$

La formola (h) cioè $\frac{\cos C + \cos A \cos B}{\operatorname{sen}^2 A} = \frac{b}{a}$ dimostra che quando in un triangolo sono dati i soli angoli non è noto che il solo rapporto de' lati; lo che è analogo a' teoremi de' numeri 39 e 40. La stessa formola (h) potrà impiegarsi per avere un lato di un triangolo per mezzo degli angoli e di un altro lato, comechè sia più semplice ricorrere alle formole del n.° 55.

(*) Potrebbe osservarsi che le formole $\operatorname{sen}(A+B)$, e $\cos(A+B)$ non sono generali; ma che sono vere tra' soli limiti di 0 e 180, essendo state dedotte dall'analisi de' triangoli rettilinei (30). Questa opposizione svanirà subito, tostocchè si rifletterà che $-(A+B) = \text{comp.}\,(90 + (A+B))$, epperò

$$\operatorname{sen} -(A+B) = -\operatorname{sen}(A+B) = \cos(90 + (A+B));$$ onde

$$\operatorname{sen}(A+B) = -\cos(90 + (A+B)):$$ parimenti sarà

$$\cos -(A+B) = \cos(A+B) = \operatorname{sen}(90 + (A+B));$$

per le quali formole il limite superiore di $A+B$ si troverà avanzato di altri 90°, e così potrà continuarsi: onde le precedenti formole sono generali.

(*) Siano φ e θ due archi, sarà

$$\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = r^2 \ (28);\ \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = r^2;$$ cioè

$$r^2 = (\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\sqrt{-1})\ (\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi\sqrt{-1});$$

$$r^2 = (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\sqrt{-1})\ (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\sqrt{-1});$$

epperò moltiplicando membro a membro, sarà

$$r^4=[(\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi\sqrt{-1})\ (\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\sqrt{-1})]$$
$$[(\cos\varphi-\operatorname{sen}\varphi\sqrt{-1})\ (\cos\theta-\operatorname{sen}\theta\sqrt{-1})]=$$
$$[(\cos\varphi\cos\theta-\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta)+(\operatorname{sen}\varphi\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\cos\varphi)\sqrt{-1}]$$
$$[(\cos\varphi\cos\theta-\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta)-(\operatorname{sen}\varphi\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\cos\varphi)\sqrt{-1}]=$$
$$[r\cos(\varphi+\theta)+r\operatorname{sen}(\varphi+\theta)\sqrt{-1}]\,[r\cos(\varphi+\theta)-r\operatorname{sen}(\varphi+\theta)\sqrt{-1}]$$
$$=r^2(\cos^2(\varphi+\theta)+\operatorname{sen}^2(\varphi+\theta));$$

onde, dividendo per r^2 sarà

$$\operatorname{sen}^2(\varphi+\theta)+\cos^2(\varphi+\theta)=r^2\ldots\ldots(1)$$

Facendo $\theta=n\varphi$, qualunque sia il valore numerico di n, sarà

$$\operatorname{sen}^2(n+1)\varphi+\cos^2(n+1)\varphi=r^2\ldots\ldots(2)$$

Le formole (1) e (2) sono la stessa formola del n.° (28), ma generalizzata.

66. (*) Indichi π la circonferenza circolare, e facciamo nelle formole di $\operatorname{sen}(\varphi\pm\theta)$, $\cos(\varphi\pm\theta)$, φ eguale successivamente a $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{4}\pi$, π, si avrà

$$(K)\begin{cases}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\pm\theta\right)=\cos\theta\ldots;\ \cos\left(\frac{\pi}{4}\pm\theta\right)=\mp\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\mp\operatorname{sen}\theta;\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=-\cos\theta\\ \operatorname{sen}\left(\frac{3}{4}\pm\theta\right)=-\cos\theta;\ \cos\left(\frac{3}{4}\pm\theta\right)=\pm\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}(\pi\pm\theta)=\pm\operatorname{sen}\theta;\ \cos(\pi\pm\theta)=\cos\theta\end{cases}$$

le quali formole sono identiche a quelle che abbiamo per altra via ottenute (23).

67. E sarà pure

$$\operatorname{sen}\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{4n+1}{4}\pi\right)=1;$$

$$\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{4n+1}{4}\pi\right)=0$$

$$\operatorname{sen}\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)=0;$$

$$\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)=-1$$

$$\operatorname{sen}\left(n\pi+\frac{3}{4}\pi\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{4n+3}{4}\pi\right)=-1;$$

$$\cos\left(n\pi+\frac{3}{4}\pi\right)=\cos\left(\frac{4n+3}{4}\pi\right)=0$$

$$\operatorname{sen}(n\pi+\pi)=\operatorname{sen}(n+1)\pi=0;$$

$$\cos(n\pi+\pi)=\cos(n+1)\pi=1$$

Epperò si avrà

$$\operatorname{sen}\left(\frac{4n+1}{4}\pi\pm b\right)=\cos b;\ \cos\left(\frac{4n+1}{4}\pi\pm b\right)=\mp\operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2n+1}{2}\pi\pm b\right)=\mp\operatorname{sen} b;\ \cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\pm b\right)=-\cos b$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{4n+3}{4}\pi\pm b\right)=-\cos b;\ \cos\left(\frac{4n+3}{4}\pi\pm b\right)=\pm\operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen}[(n+1)\pi\pm b]=\pm\operatorname{sen} b;\ \cos[(n+1)\pi\pm b]=\cos b,$$

le quali paragonate colle altre (K) (n.° prec.) ci mostrano che non cambia il valore delle linee trigonometriche di un arco, quando a questo si aggiunge un numero qualunque di circonferenze.

68. Le formole di $\operatorname{sen}(\varphi+\theta)$, $\operatorname{sen}(\varphi-\theta)$, $\cos(\varphi+\theta)$, $\cos(\varphi-\theta)$ danno colla somma e sottrazione

$$(P)\begin{cases}\operatorname{sen}(\varphi+\theta)+\operatorname{sen}(\varphi-\theta)=2\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\\ \operatorname{sen}(\varphi+\theta)-\operatorname{sen}(\varphi-\theta)=2\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\\ \cos(\varphi-\theta)+\cos(\varphi+\theta)=2\cos\varphi\cos\theta\\ \cos(\varphi-\theta)-\cos(\varphi+\theta)=2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\end{cases}$$

le quali, facendo $\theta = m\varphi$, diverranno

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(m+1)\varphi + \operatorname{sen}(m-1)\varphi &= 2\operatorname{sen}\varphi\cos m\varphi \\
\operatorname{sen}(m+1)\varphi - \operatorname{sen}(m-1)\varphi &= 2\cos\varphi\operatorname{sen} m\varphi \\
\cos(m-1)\varphi + \cos(m+1)\varphi &= 2\cos\varphi\cos m\varphi \\
\cos(m-1)\varphi - \cos(m+1)\varphi &= 2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen} m\varphi
\end{aligned}$$

E facendo nelle formole (P) $\varphi + \theta = \mu$; $\varphi - \theta = \lambda$, sarà

$\varphi = \frac{\mu+\lambda}{2}$; e $\theta = \frac{\mu-\lambda}{2}$; onde le formole (P) diverranno

$$(Q)\left\{\begin{aligned}
\operatorname{sen}\mu + \operatorname{sen}\lambda &= 2\operatorname{sen}\frac{\mu+\lambda}{2}\cos\frac{\mu-\lambda}{2} \\
\operatorname{sen}\mu - \operatorname{sen}\lambda &= 2\operatorname{sen}\frac{\mu-\lambda}{2}\cos\frac{\mu+\lambda}{2} \\
\cos\lambda + \cos\mu &= 2\cos\frac{\mu+\lambda}{2}\cos\frac{\mu-\lambda}{2} \\
\cos\lambda - \cos\mu &= 2\operatorname{sen}\frac{\mu+\lambda}{2}\operatorname{sen}\frac{\mu-\lambda}{2}
\end{aligned}\right.$$

E queste formole colla divisione dell'una per l'altra danno

$$(R)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\operatorname{sen}\mu + \operatorname{sen}\lambda}{\operatorname{sen}\mu - \operatorname{sen}\lambda} = \frac{\operatorname{tang}\frac{\mu+\lambda}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\mu-\lambda}{2}}; \quad \frac{\operatorname{sen}\mu + \operatorname{sen}\lambda}{\cos\mu + \cos\lambda} = \operatorname{tang}\frac{\mu+\lambda}{2} \\
&\frac{\operatorname{sen}\mu + \operatorname{sen}\lambda}{\cos\lambda - \cos\mu} = \cot\frac{\mu-\lambda}{2}; \quad \frac{\operatorname{sen}\mu - \operatorname{sen}\lambda}{\cos\lambda - \cos\mu} = \cot\frac{\mu+\lambda}{2} \\
&\frac{\operatorname{sen}\mu - \operatorname{sen}\lambda}{\cos\lambda + \cos\mu} = \operatorname{tang}\frac{\mu-\lambda}{2}; \quad \frac{\cos\lambda + \cos\mu}{\cos\lambda - \cos\mu} = \\
&= \cot\frac{\mu+\lambda}{2}\cot\frac{\mu-\lambda}{2} = \frac{\cot\frac{\mu+\lambda}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\mu-\lambda}{2}} = \frac{\cot\frac{\mu-\lambda}{1}}{\operatorname{tang}\frac{\mu+\lambda}{2}}.
\end{aligned}\right.$$

69. Le stesse formole di $\operatorname{sen}(\varphi+\theta)$, $\cos(\varphi+\theta)$ danno nell'ipotesi di $\varphi=\theta$

$$\operatorname{sen}2\varphi=\frac{2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{r}=\frac{2\operatorname{sen}\varphi\sqrt{r^2-\operatorname{sen}^2\varphi}}{r}=\frac{2\cos\varphi\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{r}$$

$$\cos2\varphi=\frac{\cos^2\varphi-\operatorname{sen}^2\varphi}{r}=\frac{r^2-2\operatorname{sen}^2\rho}{r}=\frac{2\cos^2\varphi-r^2}{r}:$$

e questa ultima equazione dà

$$(1)\ldots\ \operatorname{sen}^2\varphi=\frac{r^2-r\cos2\varphi}{2};\ (2)\ldots\ \cos^2\varphi=\frac{r^2+r\cos2\varphi}{2}.$$

(*) Ponendo in (1) e (2) φ per 2φ, e $\frac{\varphi}{2}$ per φ, si avrà

$$\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}=\frac{r^2}{2}-\frac{r\cos\varphi}{2}=\frac{2r^2}{4}+\frac{1}{4}r\operatorname{sen}\varphi-\frac{1}{4}r\operatorname{sen}\varphi-\frac{r}{2}\sqrt{r^2-\operatorname{sen}^2\varphi}=$$

$$=\frac{r^2}{4}+\frac{r\operatorname{sen}\varphi}{4}+\frac{r^2}{4}-\frac{r\operatorname{sen}\varphi}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{r^4-r^2\operatorname{sen}^2\varphi}=$$

$$=\frac{1}{4}(r^2+r\operatorname{sen}\varphi)-\frac{1}{2}\sqrt{r^4-r^2\operatorname{sen}^2\varphi}+\frac{1}{4}(r^2-r\operatorname{sen}\varphi)=$$

$$=\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{r^2+r\operatorname{sen}\varphi}-\sqrt{r^2-r\operatorname{sen}\varphi}\right)\right]^2;$$ da cui si ottiene

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{r^2+r\operatorname{sen}\varphi}-\sqrt{r^2-r\cos\varphi}\right)\ldots\ldots(m)$$

(*) E parimente sarà

$$\cos^2\frac{\varphi}{2}=\frac{r^2}{2}+\frac{r\cos\varphi}{2}=\frac{2r^2}{4}+\frac{1}{4}r\operatorname{sen}\varphi-\frac{1}{4}r\operatorname{sen}\varphi+\frac{r}{2}\sqrt{r^2-\operatorname{sen}^2\varphi}=$$

$$=\frac{1}{4}(r^2+r\operatorname{sen}\varphi)+\frac{1}{2}\sqrt{r^4-r^2\operatorname{sen}^2\varphi}+\frac{1}{4}(r^2-r\operatorname{sen}\varphi)=$$

$$=\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{r^2+r\operatorname{sen}\varphi}+\sqrt{r^2-r\operatorname{sen}\varphi}\right)\right]^2,$$ onde sarà

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{r^2+r\operatorname{sen}\varphi}+\sqrt{r^2-r\operatorname{sen}\varphi}\right)\ldots(n)$$

70. Dividendo $\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}$ per $\cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}$;

si avrà

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}=\sqrt{\frac{(1-\cos\varphi)^2}{1-\cos^2\varphi}}=\frac{1-\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{\frac{1-\cos\varphi}{\cos\varphi}}{\operatorname{tang}\varphi}=$$

$$\frac{\operatorname{seg}\varphi-1}{\operatorname{tang}\varphi}=\frac{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\varphi}-1}{\operatorname{tang}\varphi}\,(p)=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\cot^2\varphi}}-1}{\frac{1}{\cot\varphi}}=$$

$$\cot\varphi\left[\sqrt{1+\frac{1}{\cot^2\varphi}}-1\right]=\sqrt{\cot^2\varphi+1}-\cot\varphi:\ (q)$$

e similmente sarà $\cot\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}}=$

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{1-\cos\varphi}=(p)\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\varphi}-1}=(q)\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\varphi}-\cot\varphi}.$$

(*) Si hanno anche altre espressioni della tangente e della cotangente della metà di un arco. Così per es. abbiamo

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}=\sqrt{\frac{1-\cos^2\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}}=\frac{\operatorname{sen}\varphi}{1+\cos\varphi}=\frac{\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}}{\operatorname{seg}\varphi+1}=$$

$$\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\varphi}+1}=\frac{1}{\sqrt{\cot^2\varphi+1}+\cot\varphi}.$$

Epperò essendo $\cot=\frac{1}{\operatorname{tang}}$ sarà

$$\cot\frac{\varphi}{2}=\frac{1+\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{\operatorname{seg}\varphi+1}{\operatorname{tang}\varphi}=\frac{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\varphi}+1}{\operatorname{tang}\varphi}=\sqrt{\cot^2\varphi+1}+\cot\varphi.$$

71. Avremo parimente

$$\tang(\varphi \pm \theta) = \frac{\sen(\varphi \pm \theta)}{\cos(\varphi \pm \theta)} = \frac{\sen\varphi\cos\theta \pm \sen\theta\cos\varphi}{\cos\varphi\cos\theta \mp \sen\varphi\sen\theta} =$$

$$\frac{\tang\varphi \pm \tang\theta}{1 \mp \tang\varphi\tang\theta} = \frac{\cot\theta \pm \cot\varphi}{\cot\varphi\cot\theta \mp 1}$$

Epperò sarà

$$\cot(\varphi \pm \theta) = \frac{1}{\tang(\varphi \pm \theta)} = \frac{1 \mp \tang\varphi\tang\theta}{\tang\varphi \pm \tang\theta} = \frac{\cot\varphi\cot\theta \mp 1}{\cot\theta \pm \cot\varphi}.$$

72. Facendo $\varphi = \theta$ nelle precedenti formole, si avrà

$$\tang 2\varphi = \frac{2\tang\varphi}{1 - \tang^2\varphi} = \frac{2\cot\varphi}{\cot^2\varphi - 1};$$

$$\text{e } \cot 2\varphi = \frac{1 - \tang^2\varphi}{2\tang\varphi} = \frac{\cot^2\varphi - 1}{2\cot\varphi}.$$

(*) Abbiamo

$$\sen(\varphi \pm \theta) = \cos\varphi\cos\theta\,\frac{(\sen\varphi\cos\theta \pm \sen\theta\cos\varphi)}{\cos\varphi\cos\theta} = \cos\varphi\cos\theta(\tang\varphi \pm \tang\theta)$$

Epperò sarà

$$(h)\ldots\ \tang\varphi + \tang\theta = \frac{\sen(\varphi + \theta)}{\cos\varphi\cos\theta},\ \tang\varphi - \tang\theta = \frac{\sen(\varphi - \theta)}{\cos\varphi\cos\theta}$$

Parimente

$$\sen(\varphi \pm \theta) = \sen\varphi\sen\theta\,\frac{(\sen\varphi\cos\theta \pm \sen\theta\cos\varphi)}{\sen\varphi\sen\theta} = \sen\varphi\sen\theta(\cot\theta \pm \cot\varphi);$$

d'onde si deduce

$$(k)\ldots\ \cot\varphi + \cot\theta = \frac{\sen(\varphi + \theta)}{\sen\varphi\sen\theta},\ \cot\varphi - \cot\theta = \frac{\sen(\varphi - \theta)}{\sen\varphi\sen\theta}.$$

Moltiplicando tra loro membro a membro le due equazioni (h) e le altre due (k), si avrà

$$\tang^2\varphi - \tang^2\theta = \frac{\sen(\varphi+\theta)\sen(\varphi-\theta)}{\cos^2\varphi\cos^2\theta};$$

$$\cot^2\varphi - \cot^2\theta = -\frac{\sen(\varphi+\theta)\sen(\varphi-\theta)}{\sen^2\varphi\sen^2\theta}.$$

73. L'equazione fondamentale dà $\cos A = \frac{c - a\cos B}{b}$; cioè (69)

$$1 - 2\sen^2\frac{A}{2} = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}\cos B = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right) (60) =$$

$$\frac{c}{b} - \frac{a^2+c^2-b^2}{2bc}:$$

Liberando da frazione e ordinando, sarà

$$4bc\sen^2\frac{A}{2} = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) = a^2 - (b-c)^2 =$$

$$(a+b-c)(a-b+c); \text{ e perciò}$$

$$(T)\ldots \begin{cases} \sen^2\frac{A}{2} = \dfrac{\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)}{bc}; \\[2ex] \sen^2\frac{B}{2} = \dfrac{\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}{ac}; \\[2ex] \sen^2\frac{C}{2} = \dfrac{\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)}{ab}. \end{cases}$$

Sostituendo (69) $2\cos^2\frac{A}{2} - 1$ a $\cos A$ nell'equazione cardinale

$$\cos A = \frac{c - a\cos B}{b}, \text{ si avrà}$$

$$2\cos^2\frac{A}{2} - 1 = \frac{c}{b} - \frac{a\cos B}{b} = \frac{c}{b} - \frac{(a^2+c^2-b^2)}{2bc};$$

cioè, liberando da frazione

$$4bc\cos^2\frac{A}{2}=b^2+2bc+c^2-a^2;$$

$$=(b+c)^2-a^2=(b+c+a)(b+c-a), \text{ cioè}$$

$$(U)\ldots\begin{cases}\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{\left(\dfrac{b+c+a}{2}\right)\left(\dfrac{b+c-a}{2}\right)}{bc};\\[2ex]\cos^2\dfrac{B}{2}=\dfrac{\left(\dfrac{b+c+a}{2}\right)\left(\dfrac{a+c-b}{2}\right)}{ac};\\[2ex]\cos^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{\left(\dfrac{b+c+a}{2}\right)\left(\dfrac{a+b-c}{2}\right)}{ab};\end{cases}$$

E dividendo l'una per l'altra rispettivamente l'equazioni (T) per le (U), si avrà

$$(V)\ldots\begin{cases}\tang^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{\left(\dfrac{a+b-c}{2}\right)\left(\dfrac{a+c-b}{2}\right)}{\left(\dfrac{b+c+a}{2}\right)\left(\dfrac{b+c-a}{2}\right)};\\[2ex]\tang^2\dfrac{B}{2}=\dfrac{\left(\dfrac{b+c-a}{2}\right)\left(\dfrac{a+b-c}{2}\right)}{\left(\dfrac{b+c+a}{2}\right)\left(\dfrac{a+c-b}{2}\right)};\\[2ex]\tang^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{\left(\dfrac{b+c-a}{2}\right)\left(\dfrac{a+c-b}{2}\right)}{\left(\dfrac{b+c+a}{2}\right)\left(\dfrac{a+b-c}{2}\right)}.\end{cases}$$

74. Si elimini a per mezzo delle due formole dell' equazione cardinale, $b = a\cos C + c\cos A$; $c = a\cos B + b\cos A$, si avrà

$$\frac{b - c\cos A}{\cos C} = \frac{c - b\cos A}{\cos B}; \text{ da cui si avrà}$$

$$\frac{\cos B}{\cos C} = \frac{c - b\cos A}{b - c\cos A}; \text{ epperò}$$

$$\frac{\cos B}{\cos C} \pm 1 = \frac{c - b\cos A}{b - c\cos A} \pm 1; \text{ cioè}$$

$$\frac{\cos B + \cos C}{\cos C} = \frac{(c+b)(1 - \cos A)}{b - c\cos A} = \frac{2(c+b)\operatorname{sen}^2 \frac{A}{2}}{b - c\cos A}$$

$$\frac{\cos B - \cos C}{\cos C} = \frac{(c-b)(1 + \cos A)}{b - c\cos A} = \frac{2(c-b)\cos^2 \frac{A}{2}}{b - c\cos A}$$

dividendo la prima di queste due equazioni per la seconda, si avrà

$$\frac{\cos B + \cos C}{\cos B - \cos C} = \frac{c+b}{c-b}\operatorname{tang}^2 \frac{A}{2}; \text{ ossia } \frac{\cos C + \cos B}{\cos C - \cos B} = \frac{b+c}{b-c}\operatorname{tang}^2 \frac{A}{2};$$

ma

$$\frac{\cos C + \cos B}{\cos C - \cos B} = \frac{\cot \frac{B-C}{2}}{\operatorname{tang} \frac{B+C}{2}} \text{ (68, (R)); adunque si avrà}$$

$$\frac{\cot \frac{B-C}{2}}{\operatorname{tang} \frac{B+C}{2}} = \frac{b+c}{b-c}\operatorname{tang}^2 \frac{A}{2}; \text{ da cui si avrà}$$

$$\cot\frac{B-C}{2}=\frac{b+c}{b-c}\,\text{tang}^2\frac{A}{2}\,\text{tang}\frac{B+C}{2}=$$

$$\frac{b+c}{b-c}\,\text{tang}^2\frac{A}{2}\,\text{tang}\left(90-\frac{A}{2}\right)\left(\text{essendo } B+C=180-A;\ \text{epperò}\right.$$

$$\left.\frac{B+C}{2}=90-\frac{A}{2}\right)=\frac{b+c}{b-c}\,\text{tang}^2\frac{A}{2}\cot\frac{A}{2}=\frac{b+c}{b-c}\,\text{tang}\frac{A}{2};\ \text{ossia}$$

sostituendo $\dfrac{1}{\text{tang}\left(\dfrac{B-C}{2}\right)}$ a $\cot\dfrac{B-C}{2}$, e $\dfrac{1}{\cot\dfrac{A}{2}}$ a $\text{tang}\dfrac{A}{2}$,

si avrà finalmente

$$\text{tang}\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}\ldots\ldots(h)$$

formola comoda al calcolo logaritmo, per mezzo della quale si calcola la differenza di due angoli di un triangolo quando è noto l'altro angolo e i due lati che lo comprendono. Essa è più elegante della formola $\text{tang}\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{b-c}{b+c}\,\text{tang}\dfrac{B+C}{2}$ usata comunemente in tutte le trigonometrie, comunque possa questa facilmente alla nostra ridursi osservando che

$$\frac{B+C}{2}=90-\frac{A}{2}\ \text{epperò}\ \text{tang}\frac{B+C}{2}=\cot\frac{A}{2}.$$

(*) La precedente formola (h) può esser anche impiegata quando si conoscono due lati di un triangolo e la differenza degli angoli opposti ad essi. Infatti dati b, c, e $B-C$, si determinerà $\dfrac{A}{2}$ epperò A per mezzo della formola (h); ed essendo noto A, sarà noto $B+C$; ed allora con $B+C$ e $B-C$ si determinerà B, C e poi a coll'equazione $a=\dfrac{b\,\text{sen}\,A}{\text{sen}\,B}$ (55).

(*) L'equazione $\text{tang}\,\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$ pongasi sotto la forma $\text{tang}\,\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{\cos\frac{A}{2}}{\text{sen}\,\frac{A}{2}}$. Se questa equazione si paragona a quella de' triangoli rettangoli $\text{tang}\,B'=\frac{b'}{c'}$ (54, (5)) si osserverà che essa appartiene ad un triangolo rettangolo, i cui catetti sono $b'=(b-c)\cos\frac{A}{2}$, $c'=(b+c)\,\text{sen}\,\frac{A}{2}$, e l'angolo adjacente a c' è $B'=\frac{B-C}{2}$, ch' è l' angolo determinato dalla nostra formola. L'altro angolo C' di questo triangolo rettangolo sarà $90-B'=90-\left(\frac{B-C}{2}\right)=90-\frac{B}{2}+\frac{C}{2}$. Or essendo $A=180-B-C$, sarà $\frac{A}{2}=90-\frac{B}{2}-\frac{C}{2}$; epperò sarà $C'-\frac{A}{2}=C$. Sicchè quando sono noti due lati b, c di un triangolo coll'angolo compreso A, può calcolarsi C' come angolo di un triangolo rettangolo di cui sono noti i due catetti $(b-c)\cos\frac{A}{2}$, $(b+c)\,\text{sen}\,\frac{A}{2}$, il primo de' quali è adjacente a C'. Avuto C' si avrà $C=C'-\frac{A}{2}$. Adunque se in un triangolo obbliquangolo si conoscono b, c, A, si farà $\text{tang}\,C'=\frac{(b+c)\,\text{sen}\,\frac{A}{2}}{(b-c)\cos\frac{A}{2}}$; quindi si calco-

lerà $C = C' - \frac{A}{2}$; epperò, essendo dato A e calcolato C, si avrà B; e a sarà dato da una delle due formole $a = \frac{b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} = \frac{c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}$. Che anzi a è l'ipotenusa dello stesso triangolo rettangolo $b' = (b-c)\cos\frac{A}{2}$; $c' = (b+c)\operatorname{sen}\frac{A}{2}$, $B' = \frac{B-C}{2}$. Ed infatti chiamiamo δ questa ipotenusa, ed essendo i catetti di questo triangolo rettangolo $(b+c)\operatorname{sen}\frac{A}{2}$; $(b-c)\cos\frac{A}{2}$, sarà

$$\delta^2 = (b+c)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} + (b-c)^2 \cos^2 \frac{A}{2} = (b^2 + 2bc + c^2)\frac{(1-\cos A)}{2} +$$

$$(b^2 - 2bc + c^2)\frac{(1+\cos A)}{2} = \frac{b^2+c^2}{2} + bc - \frac{(b^2+c^2)}{2}\cos A - bc\cos A +$$

$$\frac{b^2+c^2}{2} - bc + \frac{(b^2+c^2)\cos A}{2} - bc\cos A;$$ cioè

$\delta^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = a^2$ (60). Adunque sotto la condizione quassù stabilita un triangolo obbliquangolo può esser risoluto per mezzo di un triangolo rettangolo.

(*) Legendre (*a*) ha fatto osservare che nell'ipotesi presente il triangolo obbliquangolo potevasi determinare per mezzo del triangolo rettangolo. Egli ha data l'espressione dell'ipotenusa di questo triangolo per mezzo de' catetti $(b+c)\operatorname{sen}\frac{A}{2}$, $(b-c)\cos\frac{A}{2}$ ma senza dimostrazione; ed avvertendo solamente ch'essa poteva verificarsi per dati valori di $\operatorname{sen}\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$: ed ha esibito il predetto triangolo con una costruzione geometrica. Quì le predette

(*a*) Trigonomet. Firenze 1819 pag. 52.

formole si veggono dedotte dalla nostra equazione cardinale. Siffatte formole sono specialmente utili, come lo avverte il detto Legendre, quando, essendo a piccolissimo, come pure $b-c$, si desidera calcolare con molta precisione.

(*) Essendo $\frac{b-c}{b+c}=\frac{\frac{b}{c}-1}{\frac{b}{c}+1}$, se prendasi $\text{tang}\varphi=\frac{b}{c}$, essendo

$\text{tang}\,45=1$ (pag. 31), sarà

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\text{tang}\varphi-1}{\text{tang}\varphi+1}=\frac{\text{tang}\varphi-\text{tang}\,45}{\text{tang}\varphi\,\text{tang}\,45+1}=\text{tang}(\varphi-45^{\circ})$$

Con questo valore la formola (h) (n.° 74), cioè

$$\text{tang}\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}\text{ diverrà}$$

$$\text{tang}\frac{B-C}{2}=\cot\frac{A}{2}\,\text{tang}(\varphi-45^{\circ})\ldots(k)$$

(*) Anche il Legendre ha data questa formola, verificandola col mostrarne l'identità coll'altra (h). Essa è utile quando b, c sono conosciuti per mezzo de'loro rispettivi logaritmi. Infatti in tal caso si determinerà φ per mezzo dell'equazione

$\log\text{tang}\,\varphi=\log b-\log c$; e poi $\frac{B-C}{2}$ per mezzo dell'equazione (k) quassù riportata.

75. L'equazione cardinale $a=\frac{c-b\,\text{sen}\,A}{\cos B}$, e l'altra

$a=\frac{b\,\text{sen}\,A}{\text{sen}\,B}$ (55) danno coll'eliminazione di a,

$b\,\text{sen}\,A=\frac{\text{sen}\,B}{\cos B}(c-b\cos A)=\text{tang}\,B(c-b\cos A)$ da cui si ha

$\text{tang}\,B=\frac{b\,\text{sen}\,A}{c-b\cos A}\ldots(1)$. Facciasi $c=b\cos\varphi$, lo che importa

di formare un triangolo rettangolo in cui b è l'ipotenusa e c il catetto adjacente a φ (54 (1) e (2)), la formola precedente diverrà

$$\operatorname{tang} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{c - b\cos A} = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos\varphi - \cos A} = \frac{\operatorname{sen} A}{2\operatorname{sen}\frac{A+\varphi}{2}\operatorname{sen}\frac{A-\varphi}{2}} \ldots (2)$$

formola semplicissima e forse anche nuova, mercè la quale si può facilmente calcolare coll'ajuto de'logaritmi un angolo per mezzo di due lati e dell'angolo da questi compreso.

(*) Se si dividano per $b\cos A$ i due termini della frazione $\frac{b \operatorname{sen} A}{c - b\cos A}$, l'equazione (1) diverrà $\operatorname{tang} B = \frac{\operatorname{tang} A}{\frac{c}{b}\cdot\frac{1}{\cos A} - 1}$, formola data dal Franchini (a), e qui dedotta molto più facilmente della stessa nostra equazione fondamentale.

76. Poniamo la nostra formola (1) sotto la forma

$\operatorname{tang} B = \frac{\operatorname{sen} A}{\frac{c}{b} - \cos A}$: essa ci dimostrerà i noti teoremi, 1° che un triangolo è dato di specie quando si conosce il rapporto di due lati e l'angolo da questi compreso; 2° che quando sono noti i soli angoli si conoscerà solamente il rapporto de'lati.

(*) L'equazione fondamentale ci ha dato $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (60) $= b(b - 2c\cos A) + c^2$. Facciasi $b - 2c\cos A = b\operatorname{tang}\varphi$ (lo che importa formare un triangolo rettangolo i cui catetti sono $b - 2c\cos\varphi$, b a cui è adjacente l'angolo φ (54 (5) e (6)), e $c^2 = b^2\operatorname{tang}\theta$; si avrà

$$a^2 = b^2(\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\theta) = \frac{b^2}{\cos\varphi\cos\theta}\operatorname{sen}(\varphi + \theta),$$

formola nuova ed elegante per determinare coll'ajuto de'logarit-

(a) Il Franchini la dimostra facendo $\operatorname{sen} B = \frac{b}{c}\operatorname{sen} C = \frac{b}{c}\operatorname{sen}(A+B) = \frac{b}{c}(\operatorname{sen} A\cos B + \operatorname{sen} B\cos A)$: indi dividendo ambi i membri di questa equazione per $\cos B$ e riducendo.

mi un lato per mezzo degli altri due e dell'angolo da questi compreso (*a*).

77. (*) Per servirsi di questa formola, dati b, c, A, bisognerà calcolare sulle prime $\tang\varphi = \frac{b - 2c\cos A}{b}$, e $\tang\theta = \frac{c^2}{b^2}$. Allora sostituiti i valori di φ e θ in $a^2 = \frac{b^2}{\cos\varphi\cos\theta}\operatorname{sen}(\varphi+\theta)$, si conoscerà a. Gli angoli φ e θ possono anche ottenersi facilmente per mezzo della seguente semplicissima costruzione geometrica.

(*) Sia ABC (Fig. 22) il triangolo di cui conoscasi $AC = b$, $AB = c$ e $BAC = A$: suppongasi abbassata la perpendicolare BD su di b dall'angolo opposto; e prendasi $DE = DA$; sarà $AD = c\cos A = DE$; epperò $AE = 2c\cos A$: quindi $EC = b - 2c\cos A$. Suppongasi da C innalzata la perpendicolare $CP = EC$; sarà $CP = b - 2c\cos A$: epperò sarà $\tang PAC = \frac{CP}{CA} = \frac{b - 2c\cos A}{b}$; onde sarà $b\tang PAC = b - 2c\cos A$; ed essendo $b\tang\varphi = b - 2c\cos A$, sarà $PAC = \varphi$. Dippiù l'equazione $c^2 = b^2\tang\theta$ dà $b : c = c : b\tang\theta = \frac{c^2}{b}$: perciò nel prolungamento di PC prendasi CN terza proporzionale in ordine a b, c, e si unisca AN, sarà $CN = \frac{c^2}{b} = b\tang\theta$; ma è anche $CN = b\tang CAN$; adunque sarà $CAN = \theta$; epperò $PAN = \varphi + \theta$; per cui la formola $a^2 = \frac{b^2}{\cos\varphi\cos\theta}\operatorname{sen}(\varphi+\theta)$ diverrà $a^2 = \frac{AC^2\operatorname{sen} PAN}{\cos PAC\cos CAN}$; epperò rimarrà costruita la precedente formola. Il caso del triangolo ottusangolo non presenta alcuna difficoltà.

(*) Si vede da questa costruzione che anche le formole numeri-

(*a*) Chi volesse verificarla non dovrebbe che sostituire in essa i valori di $\operatorname{sen}\varphi$, $\cos\varphi$, $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ ricavati da $\tang\varphi = \frac{b - 2c\cos A}{b}$ e da $\tang\theta = \frac{b^2}{c^2}$.

che si possono costruire; ma che queste costruzioni dell'equazioni numeriche sono del tutto inutili, ossia più curiose che utili, come suol dirsi dagli analisti: e sono poi sempre meno semplici e meno feconde delle soluzioni per approssimazione; anche perchè, quando dee farsi uso della riga e del compasso, le costruzioni geometriche riduconsi in effetto a delle approssimazioni assai meno esatte di quelle che danno le soluzioni numeriche.

78. Supponiamo noti i soli angoli nelle tre formole della equazione cardinale scritte così

$$b\cos C + c\cos B - a = 0;\ a\cos C + c\cos A - b = 0;$$
$$a\cos B + b\cos A - c = 0;$$

facendo rispettivamente $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ eguali ad m, n, p e a, b, c eguali ad x, y, z, esse diverranno

$$py + nz - x = 0;\ px + mz - y = 0;\ nx + my - z = 0:$$

alle quali adattando le formole dell'equazioni di primo grado a tre incognite; e facendo

$$D = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2\cos A\cos B\cos C \ldots (h)$$

si troverà

$$x = a = \frac{0}{D},\ y = b = \frac{0}{D};\ z = c = \frac{0}{D} \ldots (k)$$

Ciò posto le stesse tre formole dell'equazione fondamentale si dividano per b; facendo $\frac{a}{b} = m'$, $\frac{c}{b} = n'$, si avrà

$$m' - \cos C - n'\cos B = 0;\ 1 - m'\cos C - n'\cos A = 0;$$
$$n' - m'\cos B - \cos A = 0 \ldots (H).$$

Come il valore di (D) dell'equazione (h) è dato per mezzo de'soli angoli del triangolo, perciò elimineremo m', n' per mezzo delle tre equazioni (H). A tal oggetto la prima di esse si moltiplichi per $\cos C$, e'l risultamento si sommi colla seconda, si avrà

$$1 - \cos^2 C - n'(\cos A + \cos B\cos C) = 0 \ldots (L)$$

Parimenti moltiplicando la stessa prima equazione (H) per $\cos B$, e sommando colla terza, si avrà

$$n'(1-\cos^2 B)-(\cos A+\cos B\cos C)=0\ldots(M):$$

Eliminando n' per mezzo dell'equazioni (L) e (M), si avrà

$$(1-\cos^2 B)(1-\cos^2 C)-(\cos A+\cos B\cos C)^2=0\ldots(N)$$

la quale sviluppata e ridotta darà

$$1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C-2\cos A\cos B\cos C=0,\ \text{cioè}\ D=0:$$

onde le tre equazioni (k) diverranno

$$a=\frac{0}{0};\ b=\frac{0}{0};\ c=\frac{0}{0}:$$

Cioè è indeterminato il problema trigonometrico quando sono dati i soli angoli rettilinei. Il che è analogo a ciocchè abbiamo avvertito più volte (39, 41, 65 (h)).

(*) Se nell'equazione (N) identica all'altra (h) sostituiscasi sen^2 ad $1-\cos^2$, si avrà

$$\cos A=-(\cos B\cos C-\text{sen}\,B\,\text{sen}\,C)=-\cos(B+C)\ (\ 65\ (N)\ )$$

epperò $A+B+C=180$ (23), che è la nota proprietà (30) de' triangoli rettilinei.

79. Siano simili i due poligoni (Fig. 23) AE, MQ ossia siano equiangoli e proporzionali i lati intorno e dirimpetto agli angoli eguali, secondo la definizione di Euclide. Adottando i dati della definizione euclidea, sarà

$$A=M,\ ABE=B=MNQ=N,\ E=Q\ldots\ldots\ \text{e}\ \frac{BA}{AC}=\frac{NM}{MS},$$

$\frac{AC}{CP}=\frac{MS}{SR}\ldots$ Suppongasi tirate le diagonali BC, BP, NS, NR; e indicando gli angoli e i lati colle lettere segnate nella figura, sarà $\frac{c}{s}=\frac{b}{n}=\frac{b'}{n'}\ldots$, epperò $\frac{c}{b'}=\frac{s}{n'}\ldots$ Quindi, essendo BAC

simile ad *NMS* (44), sarà $\gamma=\sigma$, e poichè $ACP=MSR$ (ipotesi), sarà $\gamma'=\sigma'$. Con questi dati, applicando la formola cardinale a' due triangoli equiangoli *ABC*, *MNS* sarà

$$b=c\cos A+a\cos\gamma\ldots\ n=s\cos M+m\cos\sigma;$$

quindi sarà $\frac{b}{b'}=\frac{c}{b'}\cos A+\frac{a}{b'}\cos\gamma\ldots\frac{n}{n'}=\frac{s}{n'}\cos M+\frac{m}{n'}\cos\sigma$:

ma è $\frac{b}{b'}=\frac{n}{n'}$, $\frac{c}{b'}=\frac{s}{n'}$; ed è dippiù $A=M$, e $\gamma=\sigma$; adunque sarà $\frac{a}{b'}=\frac{m}{n'}$; ma abbiamo pure veduto essere $\gamma'=\sigma'$: adunque sarà il triangolo *BCP* simile ad *NSR* (44); e nello stesso modo coll'ajuto della stessa formola cardinale si dimostrerà il triangolo *BEP* simile ad *NQR*. Adunque *i poligoni simili possono risolversi in egual numero di triangoli simili e similmente posti.*

80. (*) Assumiamo questo teorema per definizione de' poligoni simili, e particolarmente supponiamo $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$, $\frac{c}{b}=\frac{s}{n}$, $\frac{a}{b'}=\frac{m}{n'}$, $\frac{e}{b'}=\frac{q}{n'}\ldots$ si avrà, adattando successivamente la formola cardinale a' triangoli *ABC*, *CBP*, *PBE*. . . simili rispettivamente a' triangoli *MNS*, *SNR*, *RNQ*. . ., si avrà

$$a=b\cos\gamma+c\cos\beta\ldots\ m=n\cos\sigma+s\cos\nu;\ \text{epperò sarà}$$

$$\frac{a}{b}=\cos\gamma+\frac{c}{b}\cos\beta\ldots\ \frac{m}{n}=\cos\sigma+\frac{s}{n}\cos\nu;$$

ma è $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$, $\frac{c}{b}=\frac{s}{n}$ (per la definizione); adunque sarà $\gamma=\sigma$; $\beta=\nu\ldots$ (1) Parimente adattando la formola cardinale a' triangoli *CBP*, *SNR* simili per la definizione, avremo

$$a=b'\cos\gamma'+e\cos\beta'\ldots\ m=n'\cos\sigma'+q\cos\nu':$$

onde sarà $\frac{a}{b'}=\cos\gamma'+\frac{e}{b'}\cos\beta'\ldots\frac{m}{n'}=\cos\sigma'+\frac{q}{n'}\cos\nu'$:

ma è per la definizione $\frac{a}{b'}=\frac{m}{n'}$, $\frac{e}{b'}=\frac{q}{n'}$; adunque sarà pure $\gamma'=\sigma'$, $\beta'=\nu'$. . . (2), e similmente $\beta''=\nu''$, $\delta=\rho$, $\delta'=\rho'$...; sicchè sommando membro a membro queste equazioni sarà $\gamma+\gamma'=\sigma+\sigma'$, cioè $ACP=MSR$; $\beta+\beta'+\beta''=\nu+\nu'+\nu''$; cioè $ABE=BNQ$; $\delta+\delta'=\rho+\rho'$; cioè $CPE=SRQ$. Sicchè i poligoni che si son supposti formati da triangoli rispettivamente simili, risultano equiangoli. Di più essendo per ipotesi $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$; $\frac{a}{b'}=\frac{m}{n'}$, $\frac{e}{b'}=\frac{q}{n'}$, $\frac{e}{b''}=\frac{q}{n''}$...; risulterà $\frac{b}{n}=\frac{b'}{n'}=\frac{b''}{n''}$ . . . onde i poligoni predetti risulteranno equiangoli e co'lati omologhi intorno agli angoli eguali proporzionali. Epperò *assumendo per definizione che sono simili due poligoni quando si risolvono in ugual numero di triangoli simili, ne risulta per teorema la definizione euclidea de' poligoni simili.*

81. (*) Vediamo quali di queste due definizioni è più logica. Se adotteremo la definizione che *sono simili due poligoni quando si risolvono in egual numero di triangoli simili*, osserveremo che, essendo ogni poligono divisibile in $n-2$ triangoli (n indica il numero de'lati), de'quali il primo ABC ha bisogno di tre dati, e gli altri che seguono di due (giacchè prendono il terzo dato dal triangolo precedente), il poligono avrà bisogno per esser definito di $2(n-2)+1$ dati, ossia di $2n-3$ dati; cosicchè quando è dato un lato per costruirvi un poligono simile ad un altro noto, si richiede un dato di meno di $2n-3$, ossia si richiedono $2n-4$ dati. Or, secondo la definizione euclidea, si ha bisogno di n angoli e di più di $n-1$ dati corrispondenti a'lati proporzionali: sicchè la definizione euclidea de'poligoni simili comprende $2n-1$ condizioni, cioè 3 condizioni di più (a). Sicchè è più logico il definire i poligoni simili *quelli che si possono risolvere in egual numero di triangoli simili:* e allora la definizione euclidea diviene un teorema,

(a) La cognizione di ($n-1$) angoli anche basta (32); cosicchè allora vi sarebbero per lo meno bisogno di due condizioni di più secondo Euclide.

come abbiamo noi quassù dimostrato, appoggiandoci sempre alla nostra equazione cardinale.

(*) Adunque dati i triangoli ABC, CBP, PBE si avrà pure il poligono e reciprocamente. Infatti essendo noti gli angoli di questi triangoli saranno noti gli angoli del poligono $ABE=\beta+\beta'+\beta''\ldots$; ed essendo noti i lati del triangolo saranno pure noti i lati del poligono. E parimente essendo noto A, b, c, si determinerà ABC, ACB, a (74) e sarà noto $BCP=ACP-ACB$; cosicchè nel triangolo BCP si conoscerà a, b' e l'angolo compreso γ', onde sarà noto δ, β', e; quindi sarà noto $\delta'=CPE-\delta$, e saranno pure noti e, β'', p. Ma se i triangoli o il poligono fossero dati solamente di specie, il problema sarebbe indeterminato, potendosi esibire infiniti poligoni simili al dato di specie $ABEPC$. Tutte queste riflessioni saranno una facile conseguenza della nostra equazione fondamentale. Ed infatti siano equiangoli i due triangoli ABC, MNS che fanno parte de' poligoni AE, MQ. L'equazione fondamentale applicata al triangolo ABC darà

$b=a\cos\gamma+c\cos A$; $a=b\cos\gamma+c\cos\beta$; facendo $b=\frac{cn}{s}$, sarà

$\frac{cn}{s}=a\cos\gamma+c\cos A$, $a=\frac{cn}{s}\cos\gamma+c\cos\beta$. Eliminando a o c,

per es. c, si avrà $\dfrac{\cos\gamma}{\frac{n}{s}-\cos A}a=\dfrac{s}{\frac{n}{s}\cos\gamma+\cos\beta}a$, equazione che

può aver luogo per qualunque valore di a: cosicchè allora il problema sarà determinato, quando sarà dato un poligono e almeno un lato dell'altro. Ed infatti

82. Sia un poligono AE decomposto ne' triangoli ABC..... e a, b dinotino i lati del triangolo ABC, e sia un altro poligono MQ diviso in triangoli equiangoli a quelli del primo rispettivamente: eliminando c tra le due equazioni

$$b=a\cos\gamma+c\cos A=a=b\cos\gamma+c\cos\beta, \text{ si avrà}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{\cos\beta+\cos A\cos\gamma}{\cos A+\cos\beta\cos\gamma}=\frac{\cos\nu+\cos M\cos\sigma}{\cos M+\cos\nu\cos\sigma}\ldots\ldots (h)$$

similmente si avrà

$$\frac{a}{c}=\frac{\cos\gamma+\cos A\cos\beta}{\cos A+\cos\beta\cos\gamma}=\frac{\cos\sigma+\cos M\cos\nu}{\cos M+\cos\nu\cos\sigma}\ldots\ldots (k)$$

L'equazione (h) e (k) ci dicono che si conoscerà un lato b o c... del poligono quando cogli angoli del triangolo si conoscerà pure un lato a di questo; e reciprocamente che si conoscerà un lato del triangolo ABC quando si conosceranno i suoi angoli ed un lato c o b... del poligono.

(*) Quando si ha un poligono $ABEPC$ c si vuole costruire un altro simile ad esso sulla retta n' omologa a b', si farà

$$n''=\frac{b''n'}{b'},\ n=\frac{bn'}{b'};\ s=\frac{cn}{b},\ r=\frac{ps}{c}:$$

epperò saranno noti i lati del poligono che si cerca, ed essendo noti anche gli angoli come eguali a quelli del poligono dato, il poligono che si cerca sarà dato.

83. (Fig. 24) Sia nel cerchio tirata una retta CB che divide una corda AA' per metà e ad angoli retti in B: tirate da un punto C della CB, le rette CA, CA', sarà per questa ipotesi, $C=C'$, $B=B'=90^o$ (21). Epperò l'equazione cardinale adattata a'due triangoli ACB, $A'CB$ sotto la condizione adottata sarà

$$c=b\cos A\ldots\ c=b'\cos A';\ \text{onde sarà}\ b\cos A=b'\cos A'.$$

Questa equazione dà $b=b'$, $A=A'$: dimostreremo parimente eguali tutte le altre rette tirate da qualunque punto K della CB agli estremi A, A'. Adunque la retta CB passerà per lo centro del cerchio. Epperò *il centro di un cerchio è nella retta che divide una corda per metà e ad angoli retti.*

84. (Fig. 24) Sia C il centro di un cerchio; epperò $b=b'$, e quindi $A=A'$: suppongasi da C tirata una retta qualunque CB ad un punto B della AA'; onde sarà $B'=180-B$. L'equazione cardinale applicata a questi triangoli colle condizioni stabilite sarà

$$c=b\cos A+a\cos B\ldots\ c'=b\cos A-a\cos B.$$

La differenza darà $c-c'=2a\cos B$. Se in questa equazione

supponiamo $c=c'$, sarà $\cos B=0$ e $B=90^o$; e se supponiamo $B=90$, sarà $c=c'$. Adunque *se una retta passa per lo centro di un cerchio e divide una corda per metà, la dividerà ad angoli retti, e se la divide ad angoli retti la dividerà per metà.*

85. (Fig. 25). Siano AK, $A'K'$ due corde che si seghino in un punto M diverso dal centro C, e s'intendano unite CA, CK; CA', CK', CM. Supponiamo $A'M=MK'$ (che è il caso più favorevole), e vediamo se può essere $AM=MK$. Per essere $A'M=MK'$ e C il centro, sarà (prec.) $CMA'=CMK'=90^o$, epperò fatto $CMK=M$, sarà $M<90^o$; e $CMA=180-M$. Sia $CAK=B$; $CKA=B'$, $AM=c$, $KM=c'$, $CM=b$; i due triangoli CMA, CMK daranno, mercè l'equazione cardinale

$$c=r\cos B-b\cos M\ldots\ldots\ c'=r\cos B'+b\cos M:$$

sottraendo dalla seconda la prima sarà $c'-c=2b\cos M$; ma è $M<90$; adunque non è nè può essere $c'=c$. Epperò *due corde che si tagliano in un punto diverso dal centro non possono dividersi per metà.*

86. (Fig. 26). Siano AB, AB' due corde, e dal centro C si suppongano tirate $CM=a$, $CM'=a'$ perpendicolari alle medesime rispettivamente; sappiamo essere $AM=MB$, $AM'=M'A'$ (84); onde, facendo $AM=c$ $AM'=c'$, sarà $a=r\cos ACM$; $a'=r\cos ACM'$ (54 (1)); $c=r\cos CAM$; $c'=r\cos CAM'$; supponiamo $a=a'$, sarà $r\cos ACM=r\cos ACM'$; cioè $ACM=ACM'$; quindi $CAM=CAM'$; onde sarà $c=c'$, epperò anche $AB=AB'$.

Se all'opposto supponiamo $c=c'$ sarà $r\cos CAM=r\cos CAM'$, epperò $CAM=CAM'$; quindi $ACM=ACM'$ onde sarà $a=r\cos ACM=a'$. Cioè *le corde egualmente lontane dal centro sono eguali e le corde eguali sono egualmente lontane dal centro.*

87. Risulta da questa proposizione che l'angolo di due corde eguali è diviso per metà dal diametro che passa per lo vertice di detto angolo. Dimostreremo ora l'inverso di questo teorema Siano dunque (Fig. 26) le due corde eguali AB, AB', e supponiamo che AH divida questo angolo per metà; e s'intenda unita BB' che taglia la AL in un punto H. S'indichi con φ ciascheduno degli

angoli eguali BAL, $B'AL$, la AH con b, e le AB, AC' con c, c'; avremo per l'equazione cardinale ne' triangoli AHB, AHB'

$$AH=b=c\cos\varphi+h\cos H\ldots.\ b=c\cos\varphi+h'\cos(180-H);\ \text{cioè}$$
$$b=c\cos\varphi+h\cos H\ldots.\ b=c\cos\varphi-h'\cos H\ldots\ (M):$$

la differenza di queste equazioni $(h+h')\cos H=0$; epperò $\cos H=0$, cioè $H=90$: sicchè sarà $h=c\,\text{sen}\,\varphi$; $h'=c\,\text{sen}\,\varphi$ (54 (3)), onde $h=h'$: sicchè la AHL divide BB' per metà e ad angoli retti, epperò sarà un diametro. Se le corde s'intersegassero dentro o fuori del cerchio come $B''A'K$, $B'''A'K'$, $B^{iv}K'A''$, $B^{v}KA''$, supponendole parallele alle AB, AB' rispettivamente, gli angoli φ e H sarebbero gli stessi, e la dimostrazione sarebbe identica, dipendendo dalle identiche equazioni (M). Adunque *se l'angolo di due corde eguali è diviso per metà da una retta, questa passerà per lo centro e dividerà per metà e ad angoli retti BB' KK' che uniscono gli estremi delle corde eguali.*

Sicchè il centro di un cerchio è il punto d'incontro di due rette che dividono per metà i due angoli fatti, ciascheduno da due corde eguali; ed esso è anche il punto medio di quella corda che divide per metà l'angolo di due corde eguali.

88. (Fig. 26). Suppongasi tirata una corda BB', e dal centro i raggi CB, CB', sarà

$$BB'^2=2r^2-2r^2\cos BCB'\ (60)=2r^2(1-\cos C).$$

I limiti di $\cos C$ sono 1, -1, secondochè è $C=0$ o $C=180$. Il valore di $\cos C=1$ dee esser escluso perchè sarebbe $C=0$; epperò $BB'^2=2r^2(1-1)=0$. Se supponiamo $C=90$, e quindi $\cos C=0$, sarà $BB'^2=2r^2$, e $BB'=r\sqrt{2}$. Suppongasi $C=180$, sarà $\cos C=-1$; epperò $BB'^2=4r^2$, e $BB'=2r$; cioè BB' diverrà diametro. Se poi C ha un valore medio tra 0° e 180°, (tranne il caso di $C=90$ già esaminato), $\cos C$ sarà espressa da una frazione tanto minore o maggiore, quanto più C si avvicinerà al suo limite superiore di 180° o si allontanerà da esso. In tal caso l'espressione $BB'^2=2r^2(1-\cos C)$ tanto più diverrà maggiore o minore (avendo $4r^2$ per limite superiore), quanto più $\cos C$ di-

verrà minore o maggiore, ossia quanto più C cresce o diminuisce: ma secondo che C cresce o diminuisce, così BB' si avvicina o si allontana dal centro, limite del suo aumento. Adunque BB' ha il massimo valore quando diviene diametro, in cui $\cos C = -1$; e questo valore diminuirà quanto più C si farà minore epperò $\cos C$ maggiore: ma in questo caso la corda BB' si allontanerà più dal centro. Adunque *il diametro è la massima delle corde, e la corda più vicina al centro è maggiore di quella che n' è più lontana.*

89. (Fig. 24). Applicando l'equazione fondamentale al triangolo KCK' fatto da due raggi di un cerchio e dalla corda che unisce gli estremi di essi, si avrà

$c = 2r\cos K$; ma è $2K + C = 180$, e perciò $K = 90 - \frac{C}{2}$; Adunque sarà $c = 2r\,\text{sen}\,\frac{C}{2}$..... (h).

Questa equazione ci mostra che *ne' cerchi eguali gli angoli eguali al centro hanno per base corde eguali e reciprocamente.*

Ma poichè gli angoli al centro di un cerchio sono misurati dagli archi compresi fra'suoi lati (6 e 8) ne segue che *ne' cerchi eguali gli archi eguali tagliano corde eguali e queste sottendono archi eguali.*

90. (Fig. 27). Sia A un punto preso dentro il cerchio $CC'C''$, e suppongasi $AC = AC' = AC'' = b$; ed unite le CC', CC'': suppongasi dippiù che B, B' siano i punti medii di CC', CC'' rispettivamente, e siano congiunte le BA, $B'A$; avremo $ACB = AC'B = C$; e fatto $ABC = B$, sarà $ABC' = 180 - B$; similmente fatto $ACC'' = AC''C = C'$, e $AB'C = B'$, sarà $AB'C'' = 180 - B'$. Sia $CB = C'B = a$, $CB' = C''B' = a'$, $AB = c$, $AB' = c'$; applicando la formola cardinale a'triangoli ABC, ABC' così condizionati, si avrà

$$a = b\cos C + c\cos B \ldots\ldots\ a = b\cos C - c\cos B:$$

La differenza dà $2c\cos B = 0$, epperò $B = 90$. Adunque la retta AB divide la corda CC' per metà e ad angoli retti in B: sicchè

in AB sarà il centro (83): parimente i due triangoli ACB', $AC''B'$ danno

$$a' = b' \cos C' + c' \cos B' \ldots\ldots \quad a' = b' \cos C' - c' \cos B'.$$

La differenza darà $2c' \cos B' = 0$; onde sarà $B' = 90$; onde ne conchiuderemo che in AB' è anche il centro: epperò questo sarà il punto A. Sicchè *se da un punto preso dentro il cerchio si tirino alla circonferenza più di due rette eguali, questo punto sarà il centro del cerchio.*

Adunque due cerchi non possono segarsi in più di due punti senza confondersi in un solo; poichè avrebbero lo stesso centro e lo stesso raggio.

È facile anche dimostrarsi che una retta non può segare un cerchio che in due soli punti: poichè se CC' avesse tre punti di comune colla circonferenza, unendo A con questo terzo punto, e co' punti C, C', e supponendo AB perpendicolare a CC', potrebbero da A tirarsi su di CC' tre rette eguali, una delle quali almeno o più si avvicinerebbe o più si allontanerebbe dalle altre dal piede B della perpendicolare, lo che è assurdo (pag. 48).

Adunque tutt'i problemi determinati che risguardano la retta e il cerchio non si propongono che a determinare uno o i due punti ne' quali due rette, o la retta e'l cerchio o i due cerchi si tagliano: e i due punti possono per delle condizioni particolari combaciare, cioè quando i due cerchi si toccano invece di segarsi; e in tal caso la retta tocca il cerchio invece di secarlo. La determinazione di questo punto o de' due punti fatta coll'algebra non può dipendere che da un'equazione di 1°, o di 2° grado affetta o pura, secondo i due casi; poichè l'equazioni di 2° grado danno due soli radici. Adunque tutti i problemi piani algebricamente considerati dipendono da equazioni di primo o di secondo grado: e se geometricamente si risolvono, ossia se que' punti si determinano per via d'intersezioni, altre linee non possono impiegarsi che la retta e la circonferenza circolare: epperò dicevano gli antichi e ripetono i sintetici che i problemi piani si risolvono *circino et regula*.

91. (Fig. 28). Siano ABK, $AB'K'$ due cerchi che si toccano al di dentro in un punto A, da cui si tiri una corda ABB': sia C il

centro del primo, e se fosse possibile, anche il centro dell'altro cerchio: suppongasi tirate le CA, CB, CB'. Ponendo per l'ipotesi adottata $CA=CB=CB'=b$, avremo che l'equazione cardinale applicata a' triangoli ACB, ACB' sotto le indicate condizioni darà

$$CB=b=AB\cos ABC+b\cos ACB$$
$$CB'=b=AB'\cos AB'C+b\cos ACB'.$$

La prima darà $(1-\cos ACB)b=AB\cos ABC$; e la seconda
$$(1-\cos ACB')b=AB'\cos AB'C$$

ma per essere $\cos ACB>\cos ACB'$ è $1-\cos ACB<1-\cos ACB'$: adunque sarà $AB\cos ABC<AB'\cos AB'C$, la quale porta alla conseguenza

$$\text{di } \cos ABC<\frac{AB'}{AB}\cos AB'C:$$

onde sarà $\cos ABC \gtreqless \cos AB'C$; cioè $ABC \gtreqless$ di $AB'C$ (assurdo) (57). Adunque *due cerchi che si toccano internamente non possono essere concentrici.*

(Fig. 29). Seghinsi i due cerchi ABK, $AB'K'$; si tiri da A una corda ABB'. Se potessero questi cerchi essere concentrici, sia C il centro comune e si tirino $CA=CB=CB'=b$; adattando a questa figura parola per parola la dimostrazione precedente, risulterà lo stesso assurdo di $ABC \lesseqgtr AB'C$: onde ne conchiuderemo che *due cerchi i quali si segano non possono essere concentrici.*

(Fig. 30). 92. Sia BAC un angolo che ha il suo vertice A nel semicerchio BAC, da chè i lati di esso vanno a terminare agli estremi B, C di un diametro BC; sarà $DB=DA=DC=r$; e sarà $DAB=DBA=\varphi$; e $DAC=DCA=\theta$ (21 e 52).

Ponendo $BA=c$, $AC=b$, la formola dell'equazione fondamentale applicata a'triangoli ADC, ADB sotto le condizioni indicate darà

$$b=2r\cos\theta\ldots\ldots\ c=2r\cos\varphi\ldots\ldots\ (k):$$

dividendo membro a membro queste due equazioni, sarà

$$\frac{b}{c}=\frac{\cos\theta}{\cos\varphi};\ \text{ma}\ \frac{b}{c}=\frac{\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}C}\ (55)=\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta};\ \text{adunque sarà}$$

$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{\cos\theta}{\cos\varphi}$; cioè $\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi=\operatorname{sen}\theta\cos\theta$, e $2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi=2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$, cioè $\operatorname{sen}2\varphi=\operatorname{sen}2\theta$ (69). Questa equazione può aver luogo in due modi; 1° $\varphi=\theta$; 2° $2(\varphi+\theta)=180°$ (23). Non essendo $\varphi=\theta$ che nel solo caso particolare $ADB=ADC=90$ (pag. 45, 1°), ne segue che in generale è $2(\varphi+\theta)=180°$, epperò $\varphi+\theta=90°=BAC$ (30). Adunque *l'angolo fatto nel semicerchio è retto.*

(Fig. 30). 93. La prima dell'equazioni (k) dà (per essere $\theta=90-\varphi$) $b=2r\cos\theta=2r\operatorname{sen}\varphi=2r\operatorname{sen}ABC$, da cui si ha $\operatorname{sen}ABC=\frac{1}{2}\frac{b}{r}$; ma è pure (89 ($k$)) $\operatorname{sen}\frac{ADC}{2}=\frac{1}{2}\frac{b}{r}$: adunque sarà $ABC=\frac{ADC}{2}$; similmente dimostrerassi $A'DC=\frac{A'BC}{2}$; adunque generalmente sarà $ABA'=\frac{ADA'}{2}$. Quindi *l'angolo il cui vertice è alla circonferenza del cerchio è la metà di quello che ha il vertice al centro, quando l'uno e l'altro poggiano sullo stesso arco.*

Essendo l'angolo al centro misurato dall'arco su cui poggia, l'angolo alla circonferenza sarà misurato dalla metà dello stesso arco.

(Fig. 30). 94. Or tutti gli angoli $AB'A'$... iscritti nel segmento $ABB'A$ sono nelle stesse circostanze di ABA': sicchè *gli angoli iscritti nello stesso segmento circolare sono fra loro eguali.*

I segmenti de' cerchi di differente raggio, ne' quali gli angoli iscritti sono eguali, diconsi *simili.*

95. La formola precedente $\operatorname{sen}ABC=\operatorname{sen}AB'C=\frac{1}{2}\frac{b}{r}$ (considerando questi angoli come angoli de' triangoli ABC, $AB'C$), ci

dice che *i seni degli angoli de' triangoli sono la metà del rapporto de' lati ad essi opposti al raggio del cerchio circoscritto al triangolo.*

96. Poichè AC è corda dell' arco AC che misura l' angolo ADC doppio di $AB'C$, si avrà

$$\text{sen}\,AB'C=\frac{1}{2}\frac{b}{r}=\frac{1}{2}\frac{\text{corda}\,2AB'C}{r};\ \text{cioè sen}\,\varphi=\frac{1}{2}\frac{\text{corda}\,2\varphi}{r}.\ \text{Cioè}$$

il seno di un arco è la metà del rapporto della corda dell' arco doppio al raggio del cerchio di cui l' arco fa parte.

Facendo $r=1$, sarà $\text{sen}\,\varphi=\frac{1}{2}$ lato opposto a $\varphi=\frac{1}{2}$ corda 2φ.

97. Essendo (95) $BAC=90^\circ$ sarà $ABC<90^\circ$: *sicchè l' angolo iscritto nel segmento maggiore del semicerchio è acuto.*

98. Se Am è perpendicolare a BC, sarà (pag. 49, (2),(8),(9)) (1) $b^2=2r$ in Cm; (2) $Am^2=Bm$ in mC. Cioè *se si tiri nel cerchio una corda AB, e da un estremo di essa si tiri il diametro e dall' altro estremo si abbassi sopra di questo una perpendicolare che taglia sul precedente diametro un segmento Bm adjacente alla predetta corda; questa sarà media proporzionale fra il diametro e'l predetto segmento: e la perpendicolare predetta sarà media proporzionale fra' segmenti del diametro.*

(*) (Fig. 30) Prendasi un punto qualunque A nella circonferenza circolare, da cui intendasi abbassata la perpendicolare Am sopra un diametro BC; le Dm, AC, Am varieranno come varia il punto A; epperò saranno variabili (lo che importa che i teoremi quaggiù dimostrati sono generali). Facciasi dunque $Dm=x$, epperò $mC=r-x$, $Am=r+x$, $Am=y$; $Cm=x'$, epperò $mB=2r-x'$, l'equazioni precedenti (2) e (1) diverranno rispettivamente

$$y^2=r^2-x^2\ldots.\ (h);\ b^2=2rx';\ \text{cioè}\ y^2=2rx'-x'^2\ldots.\ (k);$$

Le x, x' diconsi *escisse centate*, la prima del centro, e la seconda da un punto della circonferenza, e la Am dicesi *ordinata*. Le quantità poi variabili x, y; x', y diconsi *coordinate* al punto M,

coll'*origine* al centro o alla circonferenza; poichè ad ogni ascissa corrisponde la propria ordinata e reciprocamente: epperò la formola (h) si riferisce all'*origine* delle coordinate al centro, e l'altra (k) coll'*origine* delle coordinate sulla circonferenza.

L'equazione (h) e (k), che esprimono delle proprietà caratteristiche del cerchio, diconsi *equazione del cerchio*. E generalmente quando si esprime con una formola una delle proprietà di una curva, questa formola è l'equazione della curva: e sebbene sembrano differenti le diverse equazioni nelle quali si traducono algebraicamente le diverse proprietà delle curve, pure ciascheduna può esser ridotta alla forma dell'altra. Così per es. prendiamo l'equazione $y^2=r^2-x^2$, nella quale la $x=Dm$, se facciamo $Cm=x'$, sarà $Dm=x=CD-Cm=r-x'$; onde sostituito questo valore di x in $y^2=r^2-x^2$, si avrà $y^2=r^2-(r-x)^2=2rx'-x'^2$; ed ecco l'equazione ($h$) trasformata nella ($k$). Nello stesso modo se prendiamo l'equazione $y^2=2rx'-x'^2$, facciamo $Dm=x$, epperò $x'=r-x$, sostituendo questo valore di x' nella precedente e riducendo essa diverrà $y^2=r^2-x^2$ identica all'altra (h).

Se facciasi $Dm=x$, $Am=y$, l'ascissa presa su di DB sarà $-x$, e l'ordinata presa al di sotto di BC sarà $-y$; ma l'equazioni (h) e (k) resteranno le medesime $(-x)^2=x^2$, $(-y)^2=y^2$.

Se avessimo tradotto in equazione la proprietà del cerchio che tutt'i raggi sono eguali a qualunque punto della circonferenza si tirino; la $DA^2=Dm^2+mA^2$, qualunque sia il punto A, diverrà $r^2=x^2+y^2$; epperò $y^2=r^2-x^2$ identica all'equazione (h). Sicchè questa equazione è la traduzione in simboli della definizione del cerchio.

(Fig. 31). 99. Suppongasi una retta BA che incontri la circonferenza in B perpendicolarmente al diametro BOC', e preso in essa un punto qualunque A diverso da B si tiri al centro la $A0$ che incontrerà la circonferenza in un punto M; sarà $0B=0A\cos A0B$ (54 (1) e (2)); epperò sarà $0B<0A$, ma $0B=0M$; dunque $0M<0A$; epperò un punto qualunque A della BA, diverso dal punto B, cadrà fuori del cerchio. Sicchè la retta AB toccherà il cerchio nel solo punto B ossia sarà una *tangente* del cerchio (pag. 6). Sicchè *la retta che incontra la cir-*

conferenza ed è perpendicolare al raggio nel punto d'incontro è tangente al cerchio.

(Fig. 31). 100. Sia AB tangente e BC' un diametro; preso un punto A nella AB, suppongasi tirata la segante AC' che taglia in C l'altro punto di comune colla circonferenza (90); e si faccia $AC=b$, $AC'=b'$, $BC=a$, $BC'=a'$; la formola cardinale applicata a'due triangoli ABC, ABC', che hanno di comune c ed A, darà

$$c=b\cos A+a\cos ABC,\ AC'=c\cos A+a'\cos C':$$

moltiplicando la prima per c e la seconda per b, e sottraendo si avrà

$$c^2-AC'.b-ac\cos ABC+a'b\cos C'=0\ldots(h):$$

ma i due triangoli rettangoli ACB, ABC', avendo A di comune, sono simili (92): onde sarà $a:b=a':c$ ed $ac=a'b$; sostituendo in (h) questa diverrà

$$c^2-AC'.b-ac(\cos ABC-\cos C')=0\ldots\ldots(k)$$

la quale, trattandosi di quantità indeterminate, darà

(1) $c^2=AC'.b$; cioè $AB^2=AC'$ in AC; (2) $ABC=AC'B$.

La corda BC divide il cerchio in due segmenti BMC, $BDC'C$, e chiamano questo secondo, alterno per rispetto alla tangente AB.

Adunque *se da un punto preso fuori del cerchio si tiri una segante ad una tangente,* 1° *il quadrato della tangente sarà eguale al rettangolo della segante nella parte esterna;* 2° *e se si unisce con una corda il punto di contatto B col punto C, l'angolo fatto dalla tangente e da questa corda sarà eguale all' angolo fatto nell'alterna porzione di cerchio.*

(Fig. 31). 101. Sia BC' un diametro, e BA una retta tirata da B in modo che, tirando da un punto A di BA la segante AC' che incontra la circonferenza in C e congiunta BC, sia $ABC=B=AC'B=C'$. In virtù di questa costruzione sarà $B=C'$, $ACB=C'CB=90°$ (95), epperò $B=90-A$, $C'=90-CBC'$.

La formola cardinale adattata a' triangoli ABC, ABC' colle precedenti condizioni darà

$$AB = BC\cos B + AC\cos A \ldots \quad AB = BC'\cos ABC' + AC'\cos A:$$

la differenza darà

$$(AC' - AC)\cos A + BC'\cos ABC' - BC\cos B = 0$$

ma è $\cos A = \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} C'$, e $AC' - AC = CC'$; sicchè sarà

$$BC'\cos ABC' = BC\cos B - CC'\operatorname{sen} C'; \text{ ma}$$

$$\cos B = \cos C' = \operatorname{sen} CBC'; \text{ adunque sarà}$$

$$BC'\cos ABC' = BC\operatorname{sen} CBC' - CC'\operatorname{sen} C' = 0 \ (55):$$

quindi sarà $ABC' = 90$; epperò AB sarà tangente. Sicchè sarà vera *l'inversa della 2ª parte della proposizione precedente.*

Sia ora $c^2 = AC'.b$; con questa condizione l'equazione (k) del n.º precedente diverrà $ac(\cos ABC - \cos C') = 0$ onde $ABC = C'$; epperò (prec.) sarà AB tangente. Sicchè sarà anche *vera l'inversa della prima parte del num. precedente.*

(*) Ma questa inversa della seconda parte può dedursi direttamente dall'equazione cardinale nel seguente modo.

Sia $AC' = b'$ e per ipotesi $c^2 = AC'$ in $AC = bb'$: la formola cardinale darà

$$c = b\cos A + a\cos B \ldots \quad b' = c\cos A + a'\cos C'.$$

Dal prodotto della prima per c sottraggasi quello della seconda per b; avremo $c^2 - bb' = ac\cos B - a'b\cos C'$; cioè per l'ipotesi di $c^2 = bb'$, sarà $ac\cos B = a'b\cos C'$; la quale dà $B = C'$, epperò AB tangente, ed $a : a' = b : c$: cosicchè ne risulteranno i triangoli CBC, CAB simili; ed infatti, essendo AB tangente, sarà $B = C'$, e $CBC' = A$, poichè è $BCC' = BCA = 90°$.

Poichè su di una retta non si può innalzare che una sola perpendicolare e poichè se AB è tangente al cerchio, il raggio $0B$ tirato da B è ad essa perpendicolare, ne segue che la perpendicolare che si eleva dal punto di contatto sulla tangente passerà per lo centro; siccome pure la retta che unisce il centro col punto di contatto darà perpendicolare alla segante.

(Fig. 32 n.° 1). 102. Siano AB', $A'B$ due corde che si segano in un punto C qualunque preso dentro il cerchio, supponendo congiunte le AB, $A'B'$, sarà
$BAB'=A=BA'B'$ (94) $ABA'=B=AB'A'$: epperò i triangoli $ACB=A'CB'$ saranno simili (40) e sarà $b:c=b':c'$ ed $a:c=a':c'$ cioè $bc'=b'c$; $ac'=a'c$. Adottiamo ora l'equazione fondamentale sotto le cennate condizioni, con applicarla a' triangoli ACB, $A'CB'$, si avrà

$$a=b\cos C+c\cos B\ldots.\quad b=a\cos C+c\cos A$$
$$a'=b'\cos C+c'\cos B\ldots.\quad b'=a'\cos C+c'\cos A$$

dal prodotto della prima per la quarta, membro a membro, si tolga quello delle altre due e ponendo nel 1° membro i fattori di $ab'-a'b$, avremo riducendo

$$(ab'-a'b)\frac{(1+\cos^2 C)}{\cos C}=(a'c-ac')\cos B+(bc'-b'c)\cos A;\ \text{ma}$$

quassù abbiamo avuto $ac'=a'c$, $bc'=b'c$; adunque la precedente equazione ridurrassi a

$$(ab'-a'b)\frac{(1+\cos^2 C)}{\cos C}=0.$$

Questa equazione non potrà esser verificata che dall'ipotesi sola di $ab'-a'b=0$ (giacchè $\frac{1+\cos^2 C}{\cos C}$ è positivo o negativo, secondochè è $C\lessgtr 90°$): laonde sarà AC in $CB'=BC$ in CA'. Epperò *se due corde si segano in un cerchio il prodotto delle parti di una di essa è eguale al prodotto delle parti dell'altra.*

(Fig. 32 n.° 2). 103. Adattando parola per parola la precedente dimostrazione a' triangoli BCA, $B'CA'$ si giungerà alla stessa conseguenza di $ab'=a'b$, cioè di BC in $CA'=B'C$ in CA; ossia *se da un punto fuori di un cerchio si tirano due seganti, i prodotti delle intere seganti nelle loro rispettive parti esterne saranno eguali.*

(Fig. 33). 104. Da un punto B preso nel cerchio diverso dal centro C si tiri il diametro $ECBD$ e una qualsiasi retta BA; e facciasi $BC=a$, $CA=b$, $BA=c$. Quando BA si distende sopra BE epperò CA su di CE, ACB diviene $ECB=180$, e gli angoli B e A divengono zero: adunque questi angoli diminuiscono o crescono a proporzione che AB si avvicina o si allontana da BE. Ciò posto, la formola fondamentale applicata al triangolo BAC dà, $(h)\ldots\ c=a\cos B+b\cos A$: la quale ci mostra intuitivamente, 1° che facendosi $B=0$ $A=0$, epperò $BA=BE$, la c diverrà $a+b$, e sarà massima: 2° a proporzione che AC si discosterà da BE, gli angoli B, A divenendo maggiori, il secondo termine dell'equazione (h) diminuirà sempre più: e perciò che la BA diminuirà come si allontana da BE: 3° che quando è $ABC=180$ epperò $A=0$, il 2° termine di (h) diverrà $b-a=c=BD$, che perciò sarà un minimo; onde c diverrà un minimo BD: 4° che fatto $BA'=c'$, l'equazione $c'=a\cos B'+b\cos A'$ mostra che sarà $c=c'$ nella sola ipotesi di $B=B'$ di $A=A'$, e quindi di $A'CB=ACB$.

(*) Queste verità diverranno intuitive per mezzo dell'equazione $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$, secondo che sarà $C=180$ e quindi $BA=BE$; $C=0$ e quindi $AB=BD$; o che C più o meno si approssimerà a'limiti 180 e 0.

(Fig. 33). 105. Se dal punto M fuori del cerchio si tiri una segante qualunque MPQ, l'equazione fondamentale

$$MP=CP\cos MPC+MC\cos M,\ \text{posto (28)}$$

$$\cos M=\sqrt{1-\text{sen}^2 M}=\sqrt{1-\frac{PC^2}{MC^2}\text{sen}^2 MPC},\ \text{diverrà}$$

$$(1)\ldots\ MP=CP\cos MPC+\sqrt{MC^2-PC^2\,\text{sen}^2 MPC}.$$

L'angolo MPC crescerà o diminuirà come il suo vertice P si avvicina o si allontana dalla sua base MC (57): al punto E esso raggiungerà il suo limite superiore 180; e la formola (1) darà $MP=MC-PC=MD\ldots(m)$; al punto A in cui MP si confonde colla tangente MA, l'angolo MPC diverrà MAC e raggiungerà il limite di 90°, e in tal caso la stessa formola (1) ci darà $MP=\sqrt{MC^2-PC^2}=MA\ldots(n)$. Se la MA continuasse ad al-

lontanarsi da MC, uscirebbe fuori del cerchio: laonde, considerando sempre l'ipotesi di una incidente sulla circonferenza, la MP diverrà un'incidente qualunque MQ avendo per limite la tangente MA; e l'angolo MPC, che in A è divenuto MAC, diverrà in Q MQC minore di MAC (93), e continuando sempre a diminuire, diverrà zero in D; e la formola (1) darà
$MP = CP + MC = MD \ldots$ (p). Ne'limiti poi da E a D la formola (1) ci mostra che la incidente MP crescerà o diminuirà come diminuisce o cresce l'angolo MPC, ossia come la MP tende a confondersi con MD o con ME. Sicchè *l'equazione* (n) *ci mostra che la incidente* ME *è la minima: l'equazione* (p) *dimostra che la incidente* MD *è la massima; e l'equazione* (1) *dimostra che l'incidente più vicina alla massima è maggiore di quella che più se ne allontana; siccome che la incidente più vicina alla minima è minore di quella che più se ne allontana.*

L'equazione (n) dimostra benanche che allora un'incidente al cerchio diverrà tangente quando farà angolo retto col raggio tirato al punto in cui incontra la circonferenza, come abbiamo anche veduto (99).

Finalmente le due equazioni

$$MP = CP\cos MPC + MC\cos M \ldots \quad MP' = CP'\cos CP'M + CM\cos M$$

ci mostrano che *ogni incidente* MP, MQ... *può averne una sola eguale dall'altra parte della massima o della minima*, cioè *quella che fa un angolo eguale coll'incidente centrale sulla qual cade la massima e la minima.*

(*) L'equazione $MP^2 = MC^2 + CP^2 \pm 2MC.CP\cos MCP$ anche dedotta dalla nostra formola cardinale dimostra intuitivamente le precedenti verità.

(Fig. 34). 106. Seghinsi i due cerchi AKD, AKD' in A, K, e supponiamo uniti i centri B, B' con A, e uniti con AK i due punti d'intersezione (90), i triangoli ACB, ACB', essendo
$ACB' = 180 - ACB$, cioè $C' = 180 - C$, daranno rispettivamente

$$b = a\cos C + c\cos BAC; \quad b = -a'\cos C' + c'\cos B'AC = 0$$

La differenza darà $(a+a')\cos C + c\cos BAC - c'\cos B'AC = 0$: questa equazione corrisponde a tutte le ipotesi facendo $\cos C = 0$ epperò $C = 90^\circ$; poichè o è $c = c'$, o $c > c'$, o $c < c'$; sarà o $BAC = B'AC$; o $BAC > B'AC$; o $BAC < B'AC$; condizioni che tutte reggono coll'altra $ACB = ACB' = 90$ (21 e 53). Epperò *se due cerchi si segano, la congiungente de' centri è perpendicolare alla retta che unisce i punti d'intersezione.*

Della misura della superficie de' poligoni.

107. Il principio del combaciamento de' poligoni che hanno lati ed angoli eguali è un metodo semplice e naturale per dimostrare la loro eguaglianza. Adattato questo principio ai rettangoli ne dimostra l'eguaglianza allor ch'essi hanno la stessa base e la stessa altezza; ed il loro rapporto, quando hanno diversa la base o l'altezza, o diversa base e altezza. Poichè se le altezze A, a di due rettangoli della stessa base sono commensurabili e abbiano il rapporto di $m : n$; chiamando α l'unità lineare, che potrà supporsi piccolissima quanto piace, sarà $A = m\alpha$, $a = n\alpha$; e chiamando σ l'unità di superficie sarà $P = m\sigma$, $p = n\sigma$; onde sarà
$A : a = m\alpha : n\alpha = m : n$; $P : p = m\sigma : n\sigma = m : n$; adunque risulterà $P : p = A : a$.

Che se rimanendo identiche le basi de' due rettangoli, le altezze siano incommensurabili: portato α, m volte sopra di A, se si porti n volte su di a incommensurabile ad A, rimarrà sempre una parte h che potrà divenire indefinitamente piccola, onde avremo $A = m\alpha$, $a = n\alpha + h$: nello stesso modo la superficie del primo rettangolo sarà $P = m\sigma$, e quella del 2° $p = n\sigma + g$, (σ è la superficie elementare la cui base è la stessa di quella de' parallelogrammi e l'altezza è α); epperò sarà

$$A : a = m\alpha : n\alpha + h;\ P : p = m\sigma : n\sigma + g.$$

Quindi sarà $An\alpha + Ah = am\alpha$; $Pn\sigma + Pg = pm\sigma$: ma h e g nel loro limite possono considerarsi come evanescenti ossia zero (29); adunque avremo $An\alpha = am\alpha$, $Pn\sigma = pm\sigma$; dalle quali avremo $A : a = m : n$, $P : p = m : n$, epperò $P : p = A : a$. Adunque

i rettangoli che hanno le basi eguali e le altezze disuguali sono come le altezze commensurabili o incommensurabili.

Ragionando come qui sopra, quando le altezze sono eguali e le basi B, b diseguali, avremo $P : p = B : b$.

Epperò se P' avrà la base B di P e l'altezza A di p sarà

$$P : p = (P : P')(P' : p) = (A : a)(B : b) = AB : ab.$$

Sicchè *i rettangoli che hanno la stess' altezza sono come le basi: e quelli che hanno diversa base ed altezza sono come i prodotti delle loro rispettive basi ed altezze.*

Poichè i due triangoli, ne' quali si divide il parallelogrammo per mezzo di una sua diagonale, hanno eguali elementi, essi saranno eguali fra loro; epperò i triangoli, come metà de' detti parallelogrammi, hanno fra loro lo stesso rapporto de' rettangoli. Or i parallelogrammi e i triangoli racchiusi fra le stesse parallele hanno la stess' altezza (50), adunque lo stesso rapporto esiste fra due parallelogrammi o due triangoli qualunque, che trovansi nelle stesse circostanze de' rettangoli. Gli enunziati rapporti danno la superficie di un parallelogrammo qualunque epperò di un triangolo. Infatti se q^2 dinota l'unità quadrata ossia 1.1, e a, b l'altezza e la base rispettiva del parallelogrammo P, sarà $P : q^2 = a.b : 1.1$; epperò $P = q^2.ab$; lo che dice che ogni *parallelogrammo è eguale a tante unità quadrate quanto è il prodotto delle unità lineari della base per quelle dell'altezza.* La superficie del triangolo sarà la metà di questo prodotto. E potendosi ogni poligono risolvere in triangoli, si può facilmente avere in unità quadrate la superficie di un poligono qualunque.

108. In questo modo i geometri hanno determinato finora il rapporto della superficie di due rettangoli e quindi de' triangoli, facendo uso del principio del combaciamento, e di quello de' limiti nelle quantità incommensurabili. Ma noi quì appresso esporremo un altro metodo, forse la prima volta praticato, e che crediamo nè meno semplice nè meno generale nè meno analitico di quello di soprapposizione. Cominciamo dall'introdurci in materia.

La superficie di un rettangolo (epperò anche del parallelogram-

mo equivalente) è limitata e definita dalla sua base e dalla sua altezza; epperò è data quando sono date la sua base e la sua altezza, comunque siano queste commensurabili o incommensurabili fra loro: che anzi la detta superficie varia come varia la base, o l'altezza, o entrambe. Diremo perciò che la superficie del rettangolo è *una funzione della sua base e della sua altezza* (13), in quanto che è limitata e definita da queste sue dimensioni. Ed essendo la base una retta e tale anche l'altezza, le quali entrano egualmente nella costruzione del rettangolo, ne segue che la funzione della base è omogenea a quella dell'altezza. Vediamo di assegnare la forma di questa funzione. A qual oggetto dinotiamo con B la base e con A l'altezza, e con f la funzione, la superficie di P dovrà avere una delle seguenti forme

$$P=fA+fB\ldots\ (1);\ P=\frac{fA}{fB}\ \text{o}\ P=\frac{fB}{fA}\ldots\ (2);\ P=fA.fB\ldots(3).$$

La forma (1) e (2) è assurda, poichè in opposizione al principio degli omogenei, essendo la forma (1) quella di una retta, e la (2) quella di un numero astratto, quando A e B si riferiscono alla stessa unità di misura. D'altronde fatto $A=0$, o pure $B=0$, la (1) darebbe il rettangolo per mezzo della sola base o della sola altezza, e la (2) darebbe $P=0$, o $P=\infty$.

Adunque la forma della funzione che conviene ad una superficie, come il parallelogrammo, a formare il quale la base e l'altezza concorrono egualmente è $P=fafb$, ch'è di due dimensioni (51).

109. Determiniamo questa funzione $P=fafb$. Essa ci dà

$fa=\frac{P}{fb}$, $fb=\frac{P}{fa}$, le quali essendo entrambe di una sola dimensione (51 *), fa uopo che fa, fb debbano avere la forma $fa=ma$, $fb=nb$ in cui m, n sono numeri (*a*). Ma nella formazione del pa-

(*a*) Trattandosi di rette che terminano una superficie piana non può aversi alcuna difficoltà a comprendere che $fafb$, senza veruna quantità irrazionale o trascendente, debba esser la formola della superficie del parallelogrammo. Ed infatti è una nozione intuitiva di geometria che fa, fb come a, b

rallelogrammo entrano la sola a, e la sola b, e non ma, nb; adunque sarà $m=1$, $n=1$; epperò sarà $fa=a$, $fb=b$; e quindi $P=fafb=ab$. Adunque *la superficie di un parallelogrammo è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.*

110. Siano P, P' due parallelogrammi e le loro rispettive basi ed altezze siano a, b; a', b'; sarà $P : P'=a.b : a'.b'$. E se sono eguali le sole basi sarà $P : P'=a.b : a'.b : a : a'$; ed essendo eguali le sole altezze sarà $P : P'=ab : ab'=b : b'$. Adunque *due parallelogrammi qualunque sono fra loro come i rispettivi prodotti delle loro basi e delle loro altezze. Quando hanno la stessa base sono come le altezze, e quando hanno la stess' altezza sono come le basi.*

111. Poichè il rettangolo, la cui base e altezza sono identiche alla base e altezza di un parallelogrammo qualunque, è equivalente a questo (109), perciò potrà sempre sostituirsi al parallelogrammo il rettangolo della stessa base e altezza.

L'enunciazione data della superficie di un parallelogrammo (109) non è convenevole alla natura della superficie piana e delle linee rette: poichè la moltiplicazione è propria de' numeri; nè mai può intendersi cosa sia il prodotto di due rette; nè questo prodotto può dare una superficie piana, potendo le rette solo racchiuderla; onde quando diciamo che il parallelogrammo è funzione della base e dell' altezza, intendiamo solamente di assegnare i limiti della superficie parallelogramma in lunghezza e larghezza. La rettificazione di questa enunciazione si ha dal rapporto dimostrato

$P : P'=a.b : a'.b'$; cioè dall'equazione $P=P' \frac{a.b}{a'.b'}$; la quale ci mostra che nell'assegnare la superficie di P, si è tacitamente assunta una unità di superficie P', la quale è contenuta in P tante volte quanto lo indica il rapporto ossia il numero $\frac{a.b}{a'.b'}$: e a for-

siano notazione di una sola dimensione, come è l' espressione $\frac{P}{fa'}$, $\frac{P}{fb}$ (pag. 44 *). Questo ragionamento però non potrebbe generalmente adottarsi quando fra' termini della superficie piana vi entrasse qualche curva.

mare questo numero fa uopo che a, b, a', b' siano riferiti alla stessa unità lineare; la frazione $\frac{a.b}{a'.b'}$ diviene così un numero estratto. Suppongasi dunque $P'=a'.b'=q^2=1$ (unità quadrata); sarà $P=P'\frac{a.b}{a'.b'}=q^2.\frac{a.b}{1}=q^2.a.b$. Questa equazione ristabilisce l'omogeneità dell'enunciazione, la quale potrà modificarsi così: *la superficie di un parallelogrammo è eguale a tante unità quadrate, quanto è il prodotto delle unità lineari contenute nella sua base e nell'altezza.*

112. (Fig. 20). Abbiamo $AA'=q^2.AB'.BE=q^2.AB'.BA\text{sen}A$ (54 (3) e (4)): espressione ch'enuncia la superficie del parallelogrammo *per mezzo di due de' suoi lati e dell'angolo da questi compreso;* e che dimostra l'egualità de' *parallelogrammi i quali hanno eguali due lati e l'angolo da essi compreso.*

Siano l, b; l', b' due lati contigui di due parallelogrammi P, P'; siano a, a' le rispettive loro altezze, sarà $a=l\,\text{sen}(l, b)$, $a'=l'\text{sen}(l', b')$. Quindi $P : P'=l.b\text{sen}(l, b) : l'.b'\text{sen}(l', b)$. E se questi parallelogrammi sono equiangoli, sarà $P : P'=l.b : l'.b'$. Adunque *i parallelogrammi equiangoli sono fra loro come i rispettivi prodotti delle unità lineari che contengono i lati intorno agli angoli eguali.*

Sia $B : B'=A' : A$, o $b : b'=l' : l$, sarà $P=P'$; e se all'opposto è $P=P'$, sarà $B : B'=A' : A$; $b : b'=l' : l$.

(*) Si potrebbe opporre che il ragionamento (108) applicato parola a parola alla superficie del triangolo menerebbe all'errore che il triangolo sia eguale alla base moltiplicata per l'altezza: ma si rifletta alla condizione stabilita di $m=1$, $n=1$ nell'equazioni $fa=ma$, $fb=nb$, poichè la base e l'altezza del parallelogrammo entrano una volta ed egualmente alla formazione del parallelogrammo; lo che non può dirsi del triangolo. Infatti (Fig. 20) se l'altezza BE del parallelogrammo AA' varia e diviene BD o DE, la base rimarrà invariabile ne' parallelogrammi AA', $A'q$, An, e lo stesso sarebbe per l'altezza se variasse la sola base, com'è ne' parallelogrammi Ac, AA', pA': ma non può dirsi lo stesso pel trian-

golo nel quale, se l'altezza BE del triangolo ABD diviene BD, varierà pure la base AB' e diverrà qm, e se la base variasse varierebbe pure l'altezza. Vediamo infatti a che mena nel triangolo questa considerazione. Chiamo B la base AB' e A l'altezza BE del triangolo ABB', e siano B', A' la rispettiva base e altezza del triangolo qBm; fra le quantità A, B, A', B' esiste il rapporto $B : B' = A : A'$ (51 e 40) da cui si ha $A = \frac{A'}{B'} B$. Quindi se la superficie S del triangolo ABB' si dinoti con $fAfB$ ossia con $A\varphi B$, avremo $S = \frac{A'}{B'} B\varphi B = \frac{A'}{B'} FB = \frac{A}{B} FB$, laddove quella del parallelogrammo è AFB. Intendasi compiuto il parallelogrammo AA', il triangolo ABB' sarà metà del detto parallelogrammo, e questo essendo $A.B$, sarà $\frac{A}{B} FB = \frac{A.B}{2}$, ossia $FB = \frac{B^2}{2}$: e questo ragionamento potendosi applicare a tutt'i triangoli T che hanno la stessa base AB' e che pongono il loro vertice in un punto qualunque della retta indefinita BA' parallela ad AB', (50 *), ne segue che la formola della superficie del triangolo sarà

$T = \frac{A}{B} FB = \frac{A}{B} . \frac{B^2}{2} = \frac{A.B}{2} = q^2 \frac{A.B}{2}$. Cioè *la superficie de' triangoli è eguale a tante unità quadrate, quanto è la metà del prodotto delle unità lineari che si contengono nella sua base e nella sua altezza.*

113. Essendo (Fig. 20) $BE = BA \operatorname{sen} A$, sarà $T = \frac{A.B}{2} \operatorname{sen}(A.B)$: epperò *sono eguali due triangoli che sotto due lati eguali rispettivamente comprendono lo stesso angolo.*

Quindi se A, B; A', B' sono l'altezza e la base di due triangoli T, T', sarà $T : T' = A.B : A'.B'$; e se sono eguali o le basi o le altezze, $T : T' = A.B : A'.B = A : A'$;
$T : T' = A.B : A.B' = B : B'$. E se facciamo $BA = l$, $BE = h$ ec., sarà $T : T' = b.l \operatorname{sen}(b, l) : b'.l' \operatorname{sen}(b', l')$; e se è $(b, l) = (b', l')$

sarà $T : T' = b.l : b'.l'$. Epperò se è $T = T'$ sarà $B : B' = A' : A$; $b : b' = l' : l$; e se all'opposto sarà $B : B' = A' : A$, o $b : b' = l' : l$, sarà $T = T'$.

114. Se M indica una media proporzionale fra A, B; ed m fra A, $\frac{B}{2}$, sarà $P = M^2$, $T = m^2$, che dicesi quadrare un parallelogrammo o un triangolo.

115. Poichè ogni poligono può risolversi in triangoli e ogni triangolo in quadrato; perciò sarà facile di assegnare il quadrato equivalente ad un dato poligono. E infatti se i triangoli ne' quali si risolve il poligono (Fig. 35) P siano T, T', T''... ed m, m', m''... i lati de' quadrati equivalenti rispettivamente a questi triangoli, sarà

$$R^2 = m^2 + m'^2;\ R'^2 = R^2 + m''^2 = m^2 + m'^2 + m''^2,$$
$$R''^2 = R'^2 + m'''^2 = m' + m'^2 = m''^2 + m'''^2;$$

lo che importa disporre m, m' ad angolo retto e tirare l'ipotenusa R; indi disporre R ed m'' ad angolo retto e prendere l'ipotenusa R'; e così continuare finchè si giunge al quadrato eguale all'ultimo triangolo.

(Fig. 35). Lo stesso si avrebbe, se tirando una retta B a piacere ed elevando da un suo estremo I un perpendicolare IL, si chiamassero p, p', p''.... le perpendicolari abbassate rispettivamente da A sopra KC; e da C, E sopra KP..., e si facesse $h = p\frac{KC}{2B}$, $h' = (p' + p'')\frac{KP}{2B}$...; ne risulterebbe il rettangolo IS eguale al poligono AE; cosicchè fatto $M^2 = IS$, ossia determinando M media proporzionale B e $h + h' + h''$... sarà il poligono $AE = M^2$.

116. Sia A un lato di qualsiasi poligono P che trasformasi nel quadrato equivalente M^2: facciasi $M^2 = Ah$, epperò $h = \frac{M^2}{A}$, sarà $P = Ah = A.\frac{M^2}{A}$. Sicchè *la superficie di un poligono può*

trasformarsi in un rettangolo che ha per lati un lato qualunque A del poligono e la terza proporzionale h in ordine allo stesso lato e al lato del quadrato equivalente al medesimo poligono.

Facciasi $h=pA$, la quantità $p=\frac{h}{A}$ sarà un numero dato quando è noto $P=M^2$ ed un lato A di P. In tal caso avremo $P=Ah=pA^2=A^2.\frac{h}{A}$. Sicchè *la superficie di un poligono può esser rappresentata da p volte il quadrato di un suo lato A, essendo p ed A delle quantità determinate, quando P è dato.*

117. Siano simili due triangoli T, T', e le loro basi ed altezze rispettive siano, B, A, B', A', sarà $T=\frac{A.B}{2}$, $T'=\frac{A'.B'}{2}$. Facciasi (prec.) $T=B^2m$; $T'=B'^2n$, sarà $\frac{A.B}{2}=B^2m$, $\frac{A'.B'}{2}=B'^2n$; onde $m=\frac{A}{2B}$; $n=\frac{A'}{2B'}$. Or per esser simili i triangoli è $\frac{A}{2B}=\frac{A'}{2B'}$; sicchè sarà $m=n$; epperò $T=mB^2$, $T'=mB'^2$; da cui si avrà $T:T'=B^2:B'^2$; cioè *i triangoli simili sono come i quadrati de' lati omologhi.*

118. Siano P, P' due parallelogrammi simili, e B, A, B', A' rappresentino le basi e le altezze di essi; sarà $P=A.B$, $P'=A'.B'$ (111). Facciasi $A.B=mB^2$; $A'.B'=nB'^2$; epperò $m=\frac{A}{B}$; $n=\frac{A'}{B'}$: ma per la simiglianza di questi parallelogrammi è $\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}$: adunque sarà $m=n$, epperò $P:P'=mB^2:mB'^2=B^2:B'^2$. Cioè *i parallelogrammi simili sono come i quadrati de' lati omologhi.*

119. (Fig. 35). Siano $AE=P$, $A'E'=P'$ due poligoni simili che s'intendano risoluti ne' triangoli rispettivamente simili, T, T'. T'' ec.; t, t', t'' ec. (79); B, B' siano due lati omologhi di essi; e

dicansi p, p', p''... le rispettive altezze de'triangoli T, T', T'' rispetto a'vertici A, C, E; e q, q', q''... le altezze de'triangoli t, t', t'' per rispetto a' vertici A', C', E'. Facciasi $P=mB^2$; $P'=nB'^2$ (116); e s'intendano costruiti su di B i rettangoli T, T', T''... rispettivamente eguali a'triangoli dinotati dalle stesse lettere, le cui rispettive altezze siano h, h', h'' ec. (116), e sia $h+h'+h''$ ec. $=A$: fatto lo stesso per l'altro poligono trasformato nel rettangolo equivalente $B'.A'$, sarà $P=B.A=mB^2$; $P'=B'.A'=nB'^2$; onde $m=\frac{A}{B}$, $n=\frac{A'}{B'}$: quindi, per la eguaglianza rispettiva de'rettangoli T, t... a'triangoli KAC, $K'A'C'$ ec., sarà $B : KC=\frac{p}{2} : h$; $B' : K'C'=\frac{q}{2} : k$: ma per la simiglianza de' poligoni è $p : q=KC : K'C'=B : B'$ (79): adunque sarà $p : q=h : k$; epperò $B : B'=h : k$: e similmente sarà $B : B'=h' : k'=h'' : k''$: adunque $h : k=h' : k'=h'' : k''$; epperò $h+h'+h''... : k+k'+k''...=h : k=B : B'$; cioè $A : A'=B : B'$; epperò $m=\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}=n$; sicchè sarà $P=mB^2$; $P'=mB'^2$; onde $P : P'=B^2 : B'^2$; cioè *i poligoni simili sono come i quadrati de'lati omologhi.*

Siano l, l', l''...; m, m', m''... i lati rispettivamente omologhi di due poligoni simili; sarà $\frac{l}{m}=\frac{l'}{m'}=\frac{l''}{m''}$ ec.: facciasi $\frac{l}{m}=\alpha$, epperò $l=m\alpha$, $l'=m'\alpha$ ec.; si avrà $l+l'+l''...=\alpha(m+m'+m''...)$; onde sarà $\frac{l+l'+l''...}{m+m'+m''...}=\alpha=\frac{l}{m}=\frac{l'}{m'}$... cioè *i perimetri de' poligoni simili sono fra loro come due lati omologhi di essi.*

Abbiamo or dimostrato che varii poligoni simili i cui lat omologhi sono b, b', b''... possono esser espressi rispettivamente da mb^2, mb'^2, mb''^2... adunque i poligoni simili possono esser espressi da'rispettivi quadrati de'loro lati omologhi moltiplicati per un coefficiente costante (116).

120. Essendosi dimostrato $P=A.B$, $P'=A'.B'$, e $B:B'=A:A'$, ne segue *che i predetti rettangoli equivalenti a' poligoni simili sono anche simili.* Epperò *i poligoni simili si riducono in rettangoli simili equivalenti, quando questi sono costruiti su due lati omologhi de' poligoni.*

(Fig. 35). Questo teorema è una conseguenza immediata del rapporto che hanno i poligoni simili (119). Infatti abbiamo

$\frac{AE}{AE'}=\frac{B^2}{B'^2}=\frac{A.B}{A'.B'}$; epperò sarà $\frac{B}{B'}=\frac{A}{A'}$, per cui saranno simili i rettangoli le cui rispettive basi ed altezze sono B, A; B', A'; essendo B, B' due lati omologhi de' poligoni simili.

121. Siano P, P' due poligoni simili; e a, a' due lati omologhi di essi; chiamisi A l'ipotenusa i cui catetti sono a, a', e su di A intendasi costruito il poligono Q simile a' dati, sarà $P=ma^2$, $P'=ma'^2$, $Q=mA^2$ (116 e 119); ma è $A^2=a^2+a'^2$, (27), adunque sarà $mA^2=ma^2+ma'^2$; adunque sarà $Q=P+P'$. Sicchè *il poligono descritto sull' ipotenusa di un triangolo rettangolo è eguale alla somma de' poligoni simili descritti su' catetti.*

(Il teorema del n.° 27 n'è un caso particolare).

122. (Fig. 36). Se un trapezio T fra le basi parallele B, B' si divida ne' due triangoli ACD, AED che hanno la stessa altezza A (50), sarà $T=q.A\frac{(B+B')}{2}$, in cui q dinota l'unità di misura quadrata.

Intendasi tirata dal punto L medio di ED la LH parallela a CD e dal punto E la EP parallela ad AC, sarà $EN=\frac{EP}{2}$, $ENL=N=EPD=P$, ed $ELN=L=EDP=D$. Adattata l'equazione cardinale con queste condizioni a' triangoli EPD, ENL, si avrà

$$PD=EP\cos P+ED\cos D\ldots(1)\ldots$$

$$NL=\frac{EP}{2}\cos P+\frac{ED}{2}\cos D\ldots(2);$$

moltiplicando questa seconda per 2 e sottraendo da (1) la (2), risulterà $PD=2NL$; epperò

$AE+CD=AE+CP+2NL=2(HN+NL)=2HL$; cioè

$HL=\frac{AE+CD}{2}=\frac{B+B'}{2}$; onde sarà

$ACDE=q^2A\frac{(B+B')}{2}=q^2A\ HL$. Cioè *la superficie di un trapezio a basi parallele è eguale a tante unità quadrate, quanto è il prodotto delle unità lineari comprese nella distanza delle basi parallele per la retta tirata parallelamente ad esse dalla metà di uno de' lati.*

Epperò fatto $A.HL=M^2$, sarà $T=M^2$ unità quadrate.

123. Se a, b indicano due lati di un triangolo, sarà

$T=\frac{ab}{2}\operatorname{sen}(a,b)$; ma $b=\frac{a\operatorname{sen}(a,c)}{\operatorname{sen}(b,c)}$ (55); dunque sostituendo sarà

$$T=\frac{a^2\operatorname{sen}(a,b)\operatorname{sen}(a,c)}{2\operatorname{sen}(b,c)}=\frac{b^2\operatorname{sen}(b,c)\operatorname{sen}(b,a)}{2\operatorname{sen}(a,c)}=\frac{c^2\operatorname{sen}(c,a)\operatorname{sen}(c,b)}{2\operatorname{sen}(a,b)}$$

e ciascheduna di queste tre formole darà la superficie del triangolo per mezzo de' suoi angoli e d'un lato.

124. Parimente abbiamo

$$T=\frac{a.c}{2}\operatorname{sen}(a,c)=\frac{a.c}{2}\sqrt{1-\cos^2(a,c)}$$

$$=\frac{a\ c}{2}\sqrt{1-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2}\ (60)=\frac{a.c}{2}\sqrt{\frac{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{2ac}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

$=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}}$, formola che dà la superficie di un triangolo per mezzo de' lati.

(*) 125. Abbiamo $T=\frac{ab}{2}\operatorname{sen}C=\frac{ab}{2}\operatorname{sen}(A+B)$ (23 e 30)

$$=\frac{ab}{2}\frac{\operatorname{sen}(A+B)\operatorname{sen}(A-B)}{\operatorname{sen}(A-B)}=\frac{ab}{2}\frac{(\operatorname{sen}^2A\cos^2B-\operatorname{sen}^2B\cos^2A)}{\operatorname{sen}(A-B)}$$

$$=\frac{ab}{2}\frac{\operatorname{sen}^2A(1-\operatorname{sen}^2B)-\operatorname{sen}^2B(1-\operatorname{sen}^2A)}{\operatorname{sen}(A-B)}=\frac{ab}{2}\frac{(\operatorname{sen}^2A-\operatorname{sen}^2B)}{\operatorname{sen}(A-B)}$$

$$=\frac{ab}{2}\frac{(\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B)(\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B)}{\operatorname{sen}(A-B)}\ldots\ldots(K)$$

ma (55) $\frac{\operatorname{sen}A}{\operatorname{sen}B}=\frac{a}{b}$, epperò $\frac{\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}B}=\frac{a+b}{b}$,

$\frac{\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}B}=\frac{a-b}{b}$; cioè $\frac{(\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B)(\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B)}{\operatorname{sen}^2B}$

$=\frac{(a+b)(a-b)}{b^2}$ da cui si ha $(\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B)(\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B)$

$=\frac{(a+b)(a-b)}{b^2}\operatorname{sen}^2B=(a+b)(a-b)\frac{\operatorname{sen}B}{b}\cdot\frac{\operatorname{sen}B}{b}$

$=(a+b)(a-b)\frac{\operatorname{sen}A}{a}\cdot\frac{\operatorname{sen}B}{b}$: sostituendo in (K) si avrà

$S=\frac{1}{2}\frac{(a^2-b^2)\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}(A-B)}$, formola semplicissima data dal Legendre senza dimostrazione la quale dà la superficie di un triangolo, quando si conoscono due angoli di esso e la differenza de'quadrati de'lati ad essi opposti.

126. (Fig. 30). Siavi iscritto nel cerchio un triangolo i cui lati siano a, b, c e gli angoli ad essi rispettivamente opposti A, B, C; sarà (98) $\operatorname{sen}A=\frac{a}{2r}$, epperò

$=1-\operatorname{sen}^2A=\frac{4r^2-a^2}{4r^2}=\cos^2A=\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$ (60), da cui si

ha $$r=\frac{abc}{\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}}\ldots(h)$$

$$=\frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}\ldots(k)$$

espressione del raggio del cerchio circoscritto ad un triangolo in funzione de'lati di esso.

127. (Fig. 30). Poichè trattasi di un triangolo $AB'C$ iscritto nel cerchio, ognuno de'lati a, b, c è la corda della somma degli archi le cui corde sono gli altri due lati, o del supplemento a quattro retti della somma degli altri due archi: infatti b, per es., è la corda di ABC ossia di $AB'+B'C$, o pure b è la corda di $AC=360-(AB'+B'C)$. Adunque una delle quattro quantità a, b, c, r può aversi in funzione delle altre, facendo attenzione che la somma de' tre archi le cui corde rispettive sono a, b, c è eguale all'intera circonferenza.

Poichè a, b, c sono corde del cerchio, sarà $\frac{a}{2r}=\text{sen}A$, $\frac{b}{2r}=\text{sen}B$. Sicchè dati due lati di un triangolo da iscriversi in un cerchio qualunque non sarà dato effettivamente che il rapporto di essi lati al diametro del cerchio, ossia saranno dati gli angoli del triangolo da iscriversi, il quale sarà perciò dato di specie. Sicchè in qualsiasi cerchio può sempre iscriversi un triangolo equiangolo ad un triangolo dato. Se poi il cerchio è dato, conoscendosi con due lati di un triangolo iscritto anche il raggio, sarà determinato il terzo lato, come lo dimostra la formola (h), e 'l triangolo sarà dato.

Quando è dato un triangolo i cui lati sono a, b, c, si determinerà il raggio r del cerchio circoscritto al medesimo con una delle formole (h), (k): se si cerca di conoscere i lati a', b', c' del triangolo simile da iscriversi in un altro cerchio il cui raggio è r', sarà

$\text{sen}(a, b)=\frac{c}{2r}$; $\text{sen}(a, c)=\frac{b}{2r}$; $\text{sen}(b, c)=\frac{a}{2r}$, e parimente

$\text{sen}(a', b') = \frac{c'}{2r'}$; $\text{sen}(a', c') = \frac{b'}{2r'}$; $\text{sen}(b', c') = \frac{a'}{2r'}$: ma è

$(a, b) = (a', b')$, $(a, c) = (a', c')$, $(b, c) = (b', c')$; adunque sarà

$a' = a \cdot \frac{r}{r'}$; $c' = c \cdot \frac{r}{r'}$; $b' = b \cdot \frac{r}{r'}$; e saranno questi i lati del triangolo iscritto in un cerchio del raggio r' ed equiangolo al dato triangolo i cui dati sono a, b, c, e ch'è iscritto nel cerchio del raggio r.

128. Se il triangolo è equilatero, sarà $a = b = c$, e la formola (h) darà $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$, da cui si ha $a^2 = 3r^2$; cioè il quadrato del lato del triangolo equilatero iscritto nel cerchio è triplo del quadrato del raggio.

129. (Fig. 32 n.° 2). Sia ABB' il triangolo equilatero iscritto nel cerchio $AA'BB'$: se si suppone che D sia il punto medio dell'arco AB' sotteso dal lato AB' di esso, sarà $AD = DB'$, e le corde AD, DB' saranno i lati dell'esagono regolare iscrittibile nello stesso cerchio: e poichè l'angolo $ABD = B'BD$ (94), la BD passerà per lo centro del cerchio (87), onde l'angolo BAD sarà retto (92). Ciò posto è $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB.BD\cos ABD$ (60)

$$= AB^2 + BD^2 - 2BA \text{ in } BD \cdot \frac{BA}{BD} \text{ (54 (1))}$$

$= AB^2 + DB^2 - 2AB^2 = BD^2 - AB^2 = 4r^2 - 3r^2 = r^2$. Sicchè *il lato dell'esagono regolare iscrittibile nel cerchio è eguale al suo raggio.*

Lo stesso sarebbesi dimostrato facendo

$$AD^2 = BD^2 - AB^2 = 4r^2 - 3r^2 = r^2.$$

130. Se il triangolo è isoscele, supponendo $a = b$, sarà

$r = \frac{a^2c}{\sqrt{4a^2c^2 - c^4}} = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$; e per $b = c$, $r = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$, della stessa forma della precedente.

131. Chiamisi S la superficie del triangolo i cui lati sono, a, b, c, sarà (124) $4S=\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$: sostituendo questo valore nella formola (k) (126), sarà

$r=\frac{abc}{4S}\ldots$ (h); epperò $S=\frac{abc}{4r}$. La prima di queste formole, dando r con una equazione di primo grado per mezzo della superficie del triangolo iscritto e de'lati di esso, dimostra che *ad un triangolo qualunque può esser sempre circoscritto il cerchio; cioè che per tre punti non si può far passare che un sol cerchio.*

132. La formola $\operatorname{sen} A=\frac{a}{2r}$ (95) dà $r=\frac{a}{2\operatorname{sen} A}\ldots$ (m) ch'è il raggio del cerchio circoscritto ad un triangolo, espresso per un lato di esso e pel seno dell'angolo opposto. Se pongasi

$r=\frac{abc}{4S}$ (128 (h)), si avrà la nota formola $S=\frac{bc\operatorname{sen} A}{2}$ (123).

133. (Fig. 37). S'intendano tirate nel cerchio due tangenti $AM=s$, $AN=s'$ da un punto A preso fuori di esso e, tirati i raggi DM, DN, s'intenda unita la MN. La formola (1) (60) dedotta dalla nostra formola cardinale applicata a'triangoli MDN, MAN dà

$$MN^2=2r^2(1-\cos D)=4r^2\operatorname{sen}^2\frac{D}{2}\ ((1)\ 69)$$

$=s^2+s'^2-2ss'\cos A=(s-s')^2+4ss'\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}$. Epperò sarà

$$4r^2\operatorname{sen}^2\frac{D}{2}=(s-s')^2+4ss'\operatorname{sen}^2\frac{A}{2};$$

equazione che dà $s-s'=0$ cioè $s=s'$; epperò

$$r\operatorname{sen}\frac{D}{2}=s.\operatorname{sen}\frac{A}{2};\ \text{cioè}\ r:s=\operatorname{sen}\frac{A}{2}:\operatorname{sen}\frac{D}{2};$$

ma, tirata DA, è $r:s=\operatorname{sen} DAM:\operatorname{sen} ADM$ (55); adunque sarà $DAM=\frac{MAN}{2}$, $ADM=\frac{MDN}{2}$: epperò *se da un punto*

fuori del cerchio si tirino due tangenti e due raggi a' punti di contatto, la retta che unisce il centro col punto ove concorrono le tangenti dividerà per metà tanto l'angolo delle tangenti che l'angolo fatto da' raggi, e le due tangenti tirate al cerchio da un punto esterno saranno eguali.

Sicchè il centro del cerchio è sulla retta che divide per metà l'angolo fatto da due tangenti al medesimo.

Segue da ciò che supponendo divisi per metà due angoli CAB, ABC del triangolo ABC il centro del cerchio tangente a' lati del detto triangolo è il punto D dove le dette *biseganti* s'incontrano. Ed infatti dietro di questa ipotesi sono eguali i due triangoli MAD, NAD; siccome pure gli altri due NBD, PBD: onde sarà $DM = DN = DP$; epperò D è il centro del cerchio tangente a' lati del detto triangolo (128): onde il triangolo si troverà circoscritto al cerchio.

134. (Fig. 37). Sia ABC un triangolo circoscritto al cerchio MNP: s'indichino con a, b, c i lati opposti agli angoli A, B, C del triangolo, con r il raggio del cerchio, e con Ψ la superficie del triangolo, sarà

$$\Psi = ADC + BDC + ADB = (a+b+c)\frac{r}{2}\text{; epperò } r = \frac{2\Psi}{a+b+c}$$

formola che dà per mezzo di un'equazione di primo grado il raggio del cerchio circoscritto ad un triangolo in funzione della superficie e de' lati di esso: epperò *un cerchio solo può essere iscritto in un triangolo.*

(*) 135. Siano a', b', c' i lati di un dato triangolo; se b è una determinata tangente tirata ad un cerchio dato, il triangolo simile al dato circoscritto al cerchio avrà per lati b, $a = \frac{a'}{b'}b$; $c = \frac{c'}{b'}b$, epperò chiamata Ψ la superficie di questo triangolo e R il raggio del cerchio in esso, si avrà

$$R = \frac{2\Psi}{b\left(\frac{a'}{b'} + \frac{c'}{b'} + 1\right)} = \frac{b'}{b} \cdot \frac{2\Psi}{a'+b'+c'};$$

e questa equazione essendo di primo grado, ne segue che è dato il cerchio iscritto in un triangolo simile ad un triangolo dato, e di cui è dato un lato. E la superficie di detto triangolo sarà dato dalla formola (124)

$$\Psi=\frac{b^2}{b'^2}\sqrt{\left(\frac{a'+b'+c'}{2}\right)\left(\frac{b'+c'-a'}{2}\right)\left(\frac{a'+c'-b'}{2}\right)\left(\frac{a'+b'-c'}{2}\right)}:$$

e poichè la superficie Ψ' del dato triangolo è

$$\Psi'=\sqrt{\left(\frac{a'+b'+c'}{2}\right)\left(\frac{b'+c'-a'}{2}\right)\left(\frac{a'+c'-b'}{2}\right)\left(\frac{a'+b'-c'}{2}\right)}$$

si vede che le due superficie saranno fra loro come $\frac{b^2}{b'^2}:1$, cioè $\Psi:\Psi'=b^2:b'^2$, come sappiamo d'altronde (117).

(*) 136. (Fig. 37). Il raggio del cerchio iscritto in un triangolo i cui angoli sono A, B, C e i lati rispettivamente opposti, a, b, c è anche espresso dalla formola

$$r=\frac{a+b+b}{2\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)}$$

la quale può ottenersi facilmente dalle cose predette. Infatti chiamiamo s, s'; p, p'; q, q' le tangenti tirate rispettivamente da' vertici A, C, B del triangolo; e poichè abbiamo veduti $s=s'$, $p=p'$, $q=q'$ (130); e sappiamo di più $NAM=180-NDM$; $NBP=180-NDP$; $MCP=180-MDP$ (32, 99), sarà

(60, (1)) $MN^2=2s^2(1-\cos A)=2r^2(1-\cos D)=2r^2(1+\cos A)$,

(essendo $A=180-D$); ma è $1-\cos A=2\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}$, e

$1+\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}$ (69, (1), (2)); sicchè sarà

$4s^2\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}=4r^2\cos^2\frac{A}{2}$; cioè $2s\operatorname{sen}\frac{A}{2}=2r\cos\frac{A}{2}$; epperò

$$2s=2r\cot\frac{A}{2};\ 2p=2r\cot\frac{C}{2};\ 2q=2r\cot\frac{B}{2};\ \text{cioè}$$

$$2s+2p+2q=a+b+c=2r\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$$

d'onde si tira

$$r=\frac{a+b+c}{2\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)}\ldots$$

Quando il triangolo è equilatero è $a=b=c$, $A=B=C=60°$; sicchè la precedente formola diverrà

$r=\frac{a\,\text{sen}\,30}{2\cos 30}=a.\frac{r}{2}:2r\frac{\sqrt{3}}{2}$ (128) $=\frac{a}{2\sqrt{3}}$ (1), da cui abbiamo $a=2r\sqrt{3}$ (2). L'equazione (2) è espressione del lato del triangolo equilatero circoscritto al cerchio del raggio r; e l'altra (1) è l'espressione del raggio del cerchio iscritto nel triangolo equilatero: or abbiamo veduto che il raggio del cerchio circoscritto al triangolo equilatero è $r=\frac{a}{\sqrt{3}}$ (127). Adunque *se s'iscrive e si circoscrive il cerchio ad uno stesso triangolo equilatero, il raggio del cerchio circoscritto sarà doppio del raggio del cerchio iscritto.*

137. (Fig. 38). Abbiamo veduto che un cerchio può sempre passare per tre punti (130): vediamo ora se può passare anche per quattro punti e sotto quali condizioni. Supponiamo un quadrilatero $ABA'B'$ in cui siano tirate le diagonali AA', BB'; e gli angoli delle diagonali co' lati del quadrilatero, siccome pure i lati di questo siano dinotati dalle lettere che veggonsi nella figura, e facciasi pure $BB'=a$, $AA'=b$; i raggi r, r' de' cerchi rispettivamente circoscritti a' triangoli ABB', ABA' saranno (126)

$$r=\frac{amn}{\sqrt{(a+m+n)(m+n-a)(a+n-m)(a+m-n)}};$$

$$r'=\frac{bmn'}{\sqrt{(b+m+m')(m+m'-b)(b+m'-m)(b+m-m')}}.$$

Questi raggi risulteranno identici, ossia i due cerchi si confonderanno in uno sotto le due condizioni, di $b=a$, e di $n=m'$. La prima condizione riduce il quadrilatero a quadrato o a rettangolo (59 pag. 55 riga 14 a 17). Adunque se il quadrilatero è rettangolo o quadrato, il cerchio che passa per tre de' suoi vertici passerà pel quarto.

(*) Prima di generalizzare questo teorema, osserviamo come la nostra equazione fondamentale ci porta direttamente il precedente teorema. Infatti supponendo il quadrilatero iscritto nel cerchio epperò $B'AA'=B'BA'$, $BAA'=BB'A'$ (94) i due triangoli ABB', ABA' danno rispettivamente

$$\text{il } 1^{\circ}\ldots\ m=a\cos\varphi+n\cos A\ldots\ n=a\cos\varphi'+m\cos A$$
$$\text{il } 2^{\circ}\ldots\ m=b\cos\theta'+m'\cos B\ldots\ m'=b\cos\varphi'+m\cos B.$$

Introducendo in quest'equazioni la condizione $a=b\ldots\ m'=n\ldots$ le precedenti equazioni diverranno

$$m=a\cos\varphi+n\cos A\ldots\ n=a\cos\varphi'+m\cos A$$
$$m=a\cos\theta'+n\cos B\ldots\ n=a\cos\varphi'+m\cos B.$$

La differenza presa orizzontalmente darà

$$m-n=a(\cos\varphi-\cos\varphi')+(n-m)\cos A;$$
$$m-n=a(\cos\theta'-\cos\varphi')+(n-m)\cos B$$

le quali si verificano facendo $A=B=90$; $\varphi=\theta'$; e potendosi parimente dimostrare $\theta=\varphi'$, si deduce che i quattro angoli A, B, A', B' sono eguali e retti e le rette opposte parallele, lo che è una conseguenza: epperò il quadrilatero risulta un rettangolo o il quadrato iscritto.

138. (Fig. 38). Generalizziamo ora il teorema precedente e supponiamo che un quadrilatero qualunque sia iscritto nel cerchio; l'equazione fondamentale applicata a' triangoli BAB', $BA'B'$ che hanno di comune il lato $BB'=a$ darà

$$a=m\cos\varphi+n\cos\varphi'\ldots\ a=m'\cos\theta+n'\cos\theta';$$

ma abbiamo pure (93)

$$m=2r\operatorname{sen}\varphi',\ n=2r\operatorname{sen}\varphi,\ m'=2r\operatorname{sen}\theta',\ n'=2r\operatorname{sen}\theta;$$

sicchè eguagliando i valori di a e sostituendo per m, m', n, n' questi rispettivi loro valori si avrà

$$2r(\operatorname{sen}\varphi'\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi')=2r(\operatorname{sen}\theta'\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\cos\theta'); \text{ cioè}$$

$$\operatorname{sen}(\varphi+\varphi')=\operatorname{sen}(\theta+\theta'), \text{ ossia } \operatorname{sen}BAB'=\operatorname{sen}BA'B'.$$

In due modi può esser soddisfatta questa condizione; 1° $BAB'=BA'B'$; 2° $BAB'+BA'B'=180$. La prima condizione si riferisce al caso particolare del parallelogrammo; ed abbiamo veduto che questo parallelogrammo dee esser rettangolo. La seconda condizione rende generale il teorema mostrando che *il cerchio può passare per quattro punti, quando uniti questi con delle rette, ne sorge un quadrilatero in cui gli angoli opposti sono eguali a due retti.*

Adunque gli angoli opposti di un quadrilatero iscritto in un cerchio sono eguali a due angoli retti.

(*) Questo teorema può enunciarsi anche così. Se gli angoli opposti di un quadrilatero sono eguali a due retti, il cerchio che passa per tre de'suoi angoli, passerà pure pel quarto. E potremo dimostrarlo così direttamente. Chiamasi r il raggio del cerchio che passa per ABA' ed r' quello del cerchio che passa per $AB'A'$; e s, s' simboleggino le superficie di questi triangoli rispettivamente; sarà (128) $r=\frac{mbm'}{4s}$; $r'=\frac{nbn'}{4s'}$; e ponendo per s, s' i loro rispettivi valori (123) $\frac{m.m'\operatorname{sen}B}{2}$; $\frac{n.n'}{2}\operatorname{sen}B'=\frac{n.n'}{2}\operatorname{sen}B$ (per essere, giusta l'ipotesi, $B'=180-B$), si avrà $r=\frac{b}{2\operatorname{sen}B}$; $r'=\frac{b}{2\operatorname{sen}B}$; onde sarà r identico ad r'; per cui il cerchio circoscritto al primo triangolo è identico a quello circoscritto al secondo.

139. (Fig. 38). Vediamo in quale altro caso il cerchio che passa per tre dati punti, passa anche per un quarto punto dato. Sia dunque un cerchio che passa pe'vertici del quadrilatero $ABA'B'$ sarà (96) $m=2r\operatorname{sen}\varphi'$, $n'=2r\operatorname{sen}\theta$; epperò

$$\frac{m}{n'}=\frac{\operatorname{sen}\varphi'}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{CB}{CA'}(55)=\frac{AC}{CB'}(55); \text{ adunque}$$

$CB : CA' = CA : CB'$. Epperò *se quattro punti sono presi sulla circonferenza di un cerchio, e sono congiunti diagonalmente, i segmenti delle rette congiungenti sono fra loro in ragion reciproca; e reciprocamente se si uniscono quattro punti diagonalmente e i segmenti risultano inversamente proporzionali, il cerchio che passa per tre de' quattro dati punti, passerà pel quarto.*

140. (Fig. 38). Sia $ABA'B'$ un quadrilatero iscritto nel cerchio colle sue diagonali AA', BB'; ed applichiamo l'equazione fondamentale a' due triangoli $AA'B'$, ABB', essi daranno rispettivamente

$$n' = AA\cos\varphi + n\cos(\varphi' + \theta')\ldots\ BB' = m\cos\varphi + n\cos\varphi' :$$

la prima moltiplicata per m si sottragga dalla seconda moltiplicata per AA', si avrà

$$(h)\ldots\ AA'.BB' - m.n = n(AA'\cos\varphi' - m\cos(\varphi' + \theta')),$$

ma applicando l'equazione fondamentale al triangolo ABA' si ha

$$(l)\ldots\ m' = AA'\cos\varphi' + m\cos(\varphi + \theta) = AA'\cos\varphi' - m\cos(\varphi' + \theta')$$

(per esser $\varphi + \theta = 180 - (\varphi' + \theta')$ (135)); cioè

$$nm' = n(AA'\cos\varphi' - m\cos(\varphi' + \theta'))\ldots\ (l'):$$

paragonando l'equazione (l') all'equazione (h), si avrà

$$AA'.BB' = mn' + m'n = AB.A'B' + A'B.AB'\ldots\ (k).$$

Sicchè *nel quadrilatero iscritto nel cerchio il rettangolo delle diagonali è eguale alla somma de' rettangoli de' lati opposti.*

Questo è il prestantissimo teorema di Tolomeo sul tetragono iscritto nel cerchio, il quale teorema ha tanta relazione alla teorica delle sezioni angolari (*a*).

Passiamo a dimostrare coll'ajuto della stessa nostra formola cardinale un altro importantissimo teorema sul tetragono iscritto del cerchio dimostrato sinteticamente dal Legendre nello scolio che segue la proposizione 33 del libro III della sua pregevolissima geometria.

(*a*) Vedi la memoria del signor Nicola Fergola inserita negli Atti della R. Accademia delle Scienze Vol. I.

141. (Fig. 38). Pel teorema fondamentale abbiamo

$$AA'=n\cos\theta+n'\cos\varphi\ldots\quad m=n\cos(\theta+\theta')+BB'\cos\varphi:$$

si elimini $\cos\varphi$ fra queste due equazioni, si avrà

$$(p)\ldots\ AA'.BB'-m.n'=n(BB'\cos\theta-n'\cos(\theta+\theta'))$$

Applichiamo ora la formola fondamentale a'due triangoli $AB'A'$, $AB'B$; si avrà

$$n=n'\cos(\varphi'+\theta')+AA'\cos\theta\ldots\quad n=BB'\cos\varphi'+m\cos(\theta+\theta'):$$

la prima di queste due equazioni dà

$$\cos\theta=\frac{n-n'\cos(\varphi'+\theta')}{AA'};\ \text{epperò}$$

$$BB'\cos\theta=n\frac{BB'}{AA'}-n'\frac{BB'}{AA'}\cos(\varphi'+\theta')\ldots\ (1)$$

la seconda equazione dà

$$\cos(\theta+\theta')=\frac{n}{m}-\frac{BB'}{m}\cos\varphi';\ \text{epperò}$$

$$n'\cos(\theta+\theta')=\frac{n.n'}{m}-\frac{n'}{m}BB'\cos\varphi'\ldots\ (2)$$

sottraggasi (2) da (1); sarà

$$(q)\ldots\ BB'\cos\theta-n'\cos(\theta+\theta')=$$
$$n\left(\frac{BB'}{AA'}-\frac{n'}{m}\right)-n'BB'\left(\frac{\cos(\varphi'+\theta')}{AA'}-\frac{\cos\varphi'}{m}\right):$$

eliminando $BB'\cos\theta-n'\cos(\theta+\theta')$ fra l'equazioni (p) e (q), si avrà

$$(r)\ldots\ \frac{AA'.BB'-m.n'}{n}=$$
$$n\left(\frac{BB'}{AA'}-\frac{n'}{m}\right)-n'BB'\left(\frac{\cos(\varphi'+\theta')}{AA'}-\frac{\cos\varphi'}{m}\right);$$

ma l'equazione (h) del n.° (139) da

$$(h)\ldots\ \frac{AA'.BB'-m.n'}{n}=AA'\cos\varphi'-m\cos(\varphi'+\theta'):$$

sicchè eliminando i primi membri delle due equazioni precedenti (h) e (r) si avrà

$$AA'\cos\varphi'-m\cos(\varphi'+\theta')=$$
$$n\left(\frac{BB'}{AA'}-\frac{n'}{m}\right)-n'BB'\left(\frac{\cos(\varphi'+\theta')}{AA'}-\frac{\cos\varphi'}{m}\right);$$

liberando da frazione, sarà

$$mAA'^2\cos\varphi'-m^2AA'\cos(\varphi'+\theta')=$$
$$m.nBB'-n.n'AA'-n'BB'(m\cos(\varphi'+\theta')-AA'\cos\varphi');$$

cioè

$$m.nBB'-n'BB'(m\cos(\varphi'+\theta')-AA'\cos\varphi')=$$
$$n.n'AA'+mAA'(AA'\cos\varphi'-m\cos(\varphi'+\theta'));$$

sciogliendo in fattore per BB', e per AA', si avrà

$$BB'\left[m.n-n'\left(m\cos(\varphi'+\theta')-AA'\cos\varphi'\right)\right]=$$
$$AA'\left[n.n'+m\left(AA'\cos\varphi'-m\cos(\varphi'+\theta')\right)\right];$$

ma per l'equazione fondamentale applicata al triangolo ABA' è

$$m'=AA'\cos\varphi'+m\cos(\varphi+\theta)=AA'\cos\varphi'-m\cos(\varphi'+\theta');$$

e questa equazione è identica all'altra (l) del n.° (139); adunque eliminando il secondo membro di questa equazione, l'equazione precedente diverrà

$$BB'(m.n+m'.n')=AA'(n.n'+m.m');\ \text{cioè}$$

$$BB'(BA.B'A+BA'.B'A')=AA'(AB'.A'B'+AB.A'B);$$

che sciolta in proporzione darà il prelodato teorema di Legendre; cioè *che le due diagonali del tetragono iscritto in un cerchio sono fra loro come la somma de' rettangoli de' lati adjacenti alle loro rispettive estremità.*

142. (Fig. 38). Facendo $AA'=D$; $BB'=D'$; l'equazioni che

enunciano il teorema di Tolomeo e l'altro del Legendre acquisteranno rispettivamente la forma semplicissima

$$DD'=m.n'+n.m' \ldots \; D(n.n'+m.m')=D'(m.n+m'.n') \ldots (Q)$$

le quali combinate fra loro faranno conoscere, 1° le diagonali del tetragono iscritto nel cerchio per mezzo de'lati di esso.

Se supponiamo eguali i lati opposti, cioè $m=n'$, $m'=n$, l'equazioni (Q) diverranno

$$DD'=m^2+n^2;\; 2mm'D=2mm'D', \text{ cioè } D=D'.$$

Questa seconda equazione ci dice che quando il quadrilatero iscritto nel cerchio ha i lati opposti eguali, diviene un rettangolo, di cui è caso particolare il quadrato; lo che è analogo a ciocchè abbiamo veduto quassù (134): la prima si traduce che il prodotto delle diagonali del rettangolo è eguale alla somma de'quadrati de' suoi lati: ed infatti (Fig. 38) se $ABA'B'$ fosse rettangolo si avrebbe

$$AA'=\sqrt{m^2+n'^2}=\sqrt{m^2+n^2};\text{ e } BB'=\sqrt{n^2+n'^2}=\sqrt{m^2+n^2};$$

epperò

$$AA.BB'=m^2+n^2, \text{ ossia } \overline{AA'}^2=m^2+n^2.$$

Se poi tutt'i quattro lati m, m', n, n' sono eguali (ch'è il caso del quadrato), l'equazioni (Q), ci daranno $D.D=2m^2$; $D=D'$; cioè che il prodotto delle diagonali del quadrato o il quadrato di una di esse è doppio del quadrato del lato; o che val lo stesso $D=m\sqrt{2}$ ed $m=\frac{D}{\sqrt{2}}$.

143. (Fig. 38). Determiniamo ora alcune nuove relazioni de' quadrilateri iscritti nel cerchio. Sia dunque $ABA'B'$ uno di questi quadrilateri; tirate le diagonali AA', BB' si applichi la formola fondamentale a'triangoli ACB, $A'CB'$, ne'quali oltre gli angoli al vertice sono pure eguali quelli segnati colle stesse lettere greche, si avrà

$$BC=m\cos\varphi+AC\cos C \ldots \; A'C=n'\cos\varphi+B'C\cos C$$
$$AC=m\cos\theta'+BC\cos C \ldots \; B'C=n'\cos\theta'+A'C\cos C$$

sommando la prima e la quarta; la seconda e la terza; si avrà

$$BB' = m\cos\varphi + n'\cos\theta' + AA'\cos C$$
$$AA' = m\cos\theta' + n'\cos\varphi + BB'\cos C.$$

Facciasi $AA' = D$; $BB' = D'$; sommando le precedenti e sciogliendo in fattori, avremo

$$(D + D')(1 - \cos C) = (m + n')(\cos\varphi + \cos\theta'),$$

ossia

$$2(D + D')\operatorname{sen}^2\frac{C}{2} = 2(m + n')\cos\frac{\varphi + \theta'}{2}\cos\frac{\varphi - \theta'}{2}:$$

ma è $C = 180 - (\varphi + \theta')$ (30); epperò

$$\frac{C}{2} = 90 - \left(\frac{\varphi + \theta'}{2}\right); \text{ per cui } \operatorname{sen}\frac{C}{2} = \cos\left(\frac{\varphi + \theta'}{2}\right),$$

sostituendo nella precedente formola e riducendo sarà

$$(H)\ldots\ D + D' = (m + n')\frac{\cos\frac{\varphi - \theta'}{2}}{\cos\frac{\varphi + \theta'}{2}},$$

formola nuova ed elegantissima che dà una relazione fra la somma delle diagonali del quadrilatero iscritto in un cerchio e tra quello di due lati opposti di esso colla somma e differenza degli angoli che a' predetti lati fanno le due stesse diagonali.

Se il punto C si confonde col centro del cerchio, per cui le due diagonali D, D' divengono due diametri, sarà $D + D' = 4r$, $m = n'$, $\varphi = \theta'$, onde la formola (H) diverrà $2r = \frac{m}{\cos\varphi} = \frac{n'}{\cos\varphi'}$, ch'è la nota formola ((1) e (2) § 54) de' triangoli rettangoli; poichè in questa ipotesi $2r$ rappresenta BB' diventato diametro, m il catetto AB e φ l'angolo acuto adjacente ad AB; siccome n' ha θ' per catetto adjacente nel triangolo $BA'B'$. Quindi l'equazione

$DD' = 2m^2$ (129) diverrà $4r^2 = 2m^2$, che dà $r = \frac{m\sqrt{2}}{2}$, $m = r\sqrt{2}$

che sono l'espressioni del raggio e del lato del quadrato iscritto nel cerchio, l'una per l'altra.

La formola (H) (§ 143) adattata a'triangoli ACB', BCA' dà

$$(K)\ldots\ D+D'=(m'+n)\frac{\cos\frac{(\varphi'-\theta)}{2}}{\cos\frac{\varphi'+\theta}{2}}.$$

Abbiamo nella formola (H) $\varphi+\theta'=180-C$, epperò $\cos\left(\frac{\varphi+\theta'}{2}\right)=\operatorname{sen}\frac{C}{2}$; e nella formola (K) $\varphi'+\theta=C$ epperò $\cos\left(\frac{\varphi'+\theta}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}$: adunque l'equazioni (H) e (K) diverranno rispettivamente

$$D+D'=(m+n')\frac{\cos\frac{\varphi-\theta'}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}\ldots\ D+D'=(m'+n)\frac{\cos\frac{\varphi'-\theta}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Eliminando $D+D'$, si avrà

$$(L)\ldots\ \frac{\cos\frac{\varphi-\theta'}{2}}{\cos\frac{\varphi'-\theta}{2}}=\frac{m'+n}{m+n'}\operatorname{tang}\frac{C}{2}.$$

Per mezzo di questa formola possiamo determinare tutti gli elementi del quadrilatero iscritto nel cerchio sol che conosciamo col raggio r del cerchio, C, il rapporto $\frac{m'+n}{m+n'}$, e $\varphi-\theta'$, o pure $\varphi'-\theta$. Infatti dato il rapporto $\frac{m'+n}{m+n'}$, C, e $\varphi-\theta'$ nel triangolo ACB, sarà dato pure $\varphi+\theta'=180-C$, epperò φ e θ': allora l'equazione (L) farà conoscere $\varphi'-\theta$ nel triangolo ACB', ed essendo parimente noto $ACB'=180-C$ sarà noto $\varphi'+\theta$, epperò φ' e θ; si conosceranno dunque gli angoli che le diagonali AA',

BB' fanno cogl'ignoti lati del quadrilatero; i quali rimarranno determinati da

$$m'=2r\operatorname{sen}\theta',\ n'=2r\operatorname{sen}\theta,\ m=2r\operatorname{sen}\varphi,\ n=2r\operatorname{sen}\varphi\ (96):$$

quanto alle diagonali rimarranno determinate dalle formole (H) e (K), o dalle altre (55)

$$D=AA'=\frac{n\operatorname{sen}(\varphi'+\theta')}{\operatorname{sen}\varphi};\ D'=BB'=\frac{n\operatorname{sen}\theta(+\theta)}{\operatorname{sen}\varphi};$$

o pure ricorrendo all'equazione cardinale

$$D=AA'=n\cos\theta+n'\cos\varphi=m\cos\theta'+m'\cos\varphi'$$
$$D'=BB'=m\cos\varphi+n\cos\varphi'=m'\cos\theta+n'\cos\theta'.$$

Osserviamo che le formole

$$m=2r\operatorname{sen}\varphi',\ n=2r\operatorname{sen}\varphi;\ m'=2r\operatorname{sen}\theta';\ n'=2r\operatorname{sen}\theta\ (96)$$

sono atte a determinare i lati di un quadrilatero iscritto in un dato cerchio, quando si conoscono gli angoli che questi lati fanno colle diagonali di esso; o a determinare i predetti angoli epperò gli angoli del quadrilatero quando si conoscono i lati del medesimo.

Non conosciamo che altri siasi occupato di quest'analisi e ci sembrano nuove le formole (H) e (L).

144. (Fig. 39). Sia $ABEDF$ un poligono regolare, e s'intendano divisi per metà due de' suoi angoli FAB, ABE colle rette AC, BC le quali converranno in un punto C (46); sarà $CAB=CBA$ (h); epperò $a=b$ (52 pag. 45). Applicando l'equazione cardinale al triangolo ACB, si avrà

$$c=a\cos B+b\cos A=2a\cos B\ldots\ (1):$$

ma la stessa formola cardinale applicata al triangolo CBE dà

$$c=a\cos B+m\cos E\ldots\ (2):$$

eliminando c fra (1) e (2), si avrà $a\cos B=m\cos E$. In due modi può essere interpetrata questa equazione; 1° o $a=m$, $B=E$; 2° o $a:m=\cos E:\cos B$. Questa proporzione è assurda nell'ipo-

tesi di $a \gtrless m$, perchè ne risulterebbe $E \lessgtr B$ (pag. 45 riga 19); adunque $a=m$, $B=E$: E continuando così poi gli altri angoli, ne segue *che le rette le quali dividono per metà due angoli di un poligono regolare si uniscono in un punto, dal quale tirate le rette agli altri angoli dello stesso poligono, queste saranno eguali e divideranno anche per metà gli angoli rimanenti rispettivi ove terminano.*

(*) Questo teorema è racchiuso nell'equazione (1) ossia $c=2a\cos B$: infatti essendo $A+B+C=180$, ossia $2B=180-C$: sarà $B=90^o-\frac{C}{2}$: laonde la precedente equazione diverrà

$$c=2a\,\text{sen}\,\frac{C}{2}=\frac{r\sqrt{(b+c-a)(a+c-b)}}{b}\ (\text{pag. } 72\,(T))=\frac{rc}{b},$$

la quale dà $c(b-r)=0$: ossia $b=r$; cioè *qualunque di quelle* biseganti *è quanto il raggio del cerchio circoscritto al poligono regolare.*

Sicchè ad ogni poligono regolare può esser circoscritto il cerchio, il cui centro è all'unione di due di quelle biseganti, e'l cui raggio è uno di queste.

145. (Fig. 39). Abbiamo $Cq=r\,\text{sen}\,\frac{D}{2}=Cp=m\,\text{sen}\,\frac{E}{2}=Ch$..

Sicchè *tutte le perpendicolari che si abbassano dal centro su' lati del poligono regolare, sono eguali.*

Epperò il cerchio descritto col centro di un poligono regolare e col raggio eguale ad una delle predette perpendicolari passerà tangenzialmente a'lati del poligono (pag. 6, e 99) e sarà iscritto in esso.

Sicchè in ogni poligono regolare può iscriversi il cerchio il cui centro coincide con quello del cerchio circoscritto, e'l cui raggio è la perpendicolare abbassata dal centro su di un lato di esso, e che i geometri dicono *apotéma.*

146. Sia c un lato del poligono regolare di un numero n di lati,

e a il suo apotema (144), la superficie del poligono sarà espressa dalla formola $\frac{nc.a}{2}$.

147. Sia A il lato di un poligono regolare P, e a l'omologo del poligono p simile a P e perciò regolare: siano R, R' i raggi de' cerchi rispettivamente circoscritti ad essi, e r, r' i rispettivi raggi de' cerchi iscritti; sarà $\frac{A}{a}=\frac{R}{R'}=\frac{r}{r'}$ (40) epperò (119) $P:p=R^2:R'^2=r^2:r'^2$; e se Π, ϖ indicano li perimetri rispettivi di essi, essendo $\Pi:\varpi=A:a$ (119 2ª parte), sarà

$$\Pi:\varpi=R:R'=r:r'.$$

Cioè *la superficie de' poligoni simili sono fra loro come i quadrati de' raggi de' cerchi circoscritti o iscritti ad essi; e i loro perimetri sono come gli stessi semplici raggi.*

Iscrizione e circoscrizione de' poligoni regolari nel cerchio.

148. Le teoriche che abbiamo sviluppate e le formole che ne abbiamo ottenute menano direttamente alla soluzione del problema d'inscrivere nel cerchio e di circoscrivere ad esso alcuni poligoni regolari. A tal oggetto riprendiamo la prima formola (Q) (142), cioè $DD'=mn'+nm'$ e supponiamo che $D=AA'$ (Fig. 38) divenga diametro del cerchio, ossia $2r$; saranno retti gli angoli $AB'A'$, ABA'; epperò sarà

$$2rD'=m\sqrt{4r^2-n^2}+n\sqrt{4r^2-m^2}, \text{ che darà}$$

$$D'=\frac{m\sqrt{4r^2-n^2}+n\sqrt{4r^2-m^2}}{2r}\ldots (1).$$

Questa formola, oltre il raggio del cerchio, contiene i tre lati del triangolo BAB'; cosicchè possiamo da tre di queste quantità determinare la rimanente, come abbiamo anche osservato (127).

149. Supponiamo $m=n$, la formola (1) diverrà

$$D'=\frac{m\sqrt{4r^2-m^2}}{r}\ldots (2)$$

che in un dato cerchio ci darà D' per m, ed m per D'; cioè la corda di un arco per mezzo di quella della sua metà, e all'opposto. Così se vogliamo il lato del triangolo equilatero da iscriversi in un dato cerchio per mezzo del lato dell'esagono, essendo questo espresso da r (128), si porrà in (2) $m=r$, e si avrà $D'=r\sqrt{3}$, come sappiamo d'altronde. E se, essendo noto il lato del triangolo equilatero iscritto nel cerchio, si vuole il lato dell'esagono, bisognerà porre in (2) $D'=r\sqrt{3}$: fattane la sostituzione e riducendo, si avrà l'equazione $m^4-4r^2m^2+3r^4=0$ la quale darà $m^2=2r^2\pm r^2$: il solo segno inferiore soddisfa al problema, poichè il segno superiore darebbe $m=D'$: laonde sarà $m=r$, come sappiamo d'altronde (128).

150. La formola (2) dà $r=\dfrac{m^2}{\sqrt{4m^2-D'^2}}\ldots$ (3) che dà il raggio del cerchio circoscritto al triangolo isoscele i di cui due lati eguali sono m, e l'altro è D'. Identico valore si sarebbe avuto dalla formola (h) (136) facendo in essa due lati eguali.

Se si pone $D'=m$ nell'equazione (3), si avrà $r=\dfrac{m}{\sqrt{3}}$, da cui si deduce $m=r\sqrt{3}$, come abbiamo pure ottenuto per altra via (128).

Riepilogando dunque abbiamo, per iscrivere nel cerchio di raggio r,

un triangolo qualunque i cui lati sono D', m, n

$$(\mathrm{I})\ldots\ D'=\frac{m\sqrt{4r^2-n^2}+n\sqrt{4r^2-m^2}}{r};$$

$$r=\frac{D'mn}{\sqrt{4m^2D^2-(D'+m^2-n^2)^2}};$$

un triangolo isoscele i cui lati sono D', m

$$(\mathrm{II})\ldots\ D'=\frac{m\sqrt{4r^2-m^2}}{r};\ r=\frac{m^2}{\sqrt{4m^2-D'^2}};$$

il triangolo equilatero il cui lato è m

$$(\text{III})\ldots\ m=r\sqrt{3}\ldots\ r=\frac{m}{\sqrt{3}}.$$

Se nella formola (II) (150) si ponga $D'=$ lato dell'esagono regolare $=r$, si avrà per m il lato del dodecagono regolare iscritto; e fatto questo $=D'$, si avrà per m il lato del poligono regolare iscritto di 24 lati: e così continuando indefinitamente potremo avere i lati de'poligoni regolari iscritti di 48, di 96, di 192... lati.

151. Passiamo al lato del quadrato iscritto nel cerchio. Si tirino (Fig. 40) i due diametri rettangolari AC, BD e si congiungano A, B, C, D: la formola cardinale darà per AB, che chiameremo q, l'espressione

$$(\text{IV})\ldots\ q=2r\cos 45=r\sqrt{2}\ (28),\ \text{d'onde}\ r=\frac{q}{\sqrt{2}}.$$

Se nella formola (II) (150) pongasi $D'=r\sqrt{2}$, si avrà per m il lato dell'ottagono iscritto nel cerchio; e posto questo lato $=D'$, si avrà per m il lato del poligono regolare di 16 lati, e così successivamente potremo avere i lati de'poligoni regolari iscritti di 32, 64, 128... lati all'infinito.

152. Per iscrivere il lato del pentagono regolare, determiniamo prima il lato del decagono regolare. Sia perciò (Fig. 40) AP il lato del decagono, sarà $AEP=$ arco $AP=36^\circ$; epperò $EAP=EPA=72^\circ=2AEP$. Tirisi $PF=PA$, e pongasi $AF=b$; $EA=r$, $AP=c$. La formola cardinale applicata al triangolo AEP sotto le precedenti condizioni darà

$$c=2r\cos 2AEP=2r\cos 2E;\ \text{epperò}\ r=\frac{c}{2\cos 2E}\ldots\ (1):$$

ed applicata al triangolo FPA darà $b=2c\cos 2E\ldots$ (2): moltiplicando membro a membro (1) per (2), si avrà $br=c^2\ldots$ (3). Ma, per essere $PFA=A=2E$, è $PFE=180-2E$, ed è $FPE=180-E-PFE=180-E-(180-2E)=E$: adunque sarà $PF=PA=EF=c$. Sicchè l'equazione (3) diverrà

$$c^2=EF^2=EA.AF.$$

Quando una retta EA dividesi in modo in un punto F che la parte maggiore FE sia media proporzionale fra l'intera retta e la rimanente parte AF, dicesi divisa in *estrema e media ragione*. Adunque *il lato del decagono regolare iscrittibile in un cerchio dato è eguale alla parte maggiore del suo raggio diviso in estrema e media ragione.*

Facciasi perciò $AP = EF = x$, si avrà $x^2 + rx - r^2 = 0$ la quale darà, fatte le riduzioni

$$\text{(V)} \;..\; \text{lato del decagono} = m = \frac{r}{2}(-1+\sqrt{5}).$$

153. Per avere ora il lato del pentagono facciasi nell'equazione (II) (150) $m = \frac{r}{2}(-1+\sqrt{5})$, ne risulterà che il lato del pentagono sarà

$$\text{(VI)}\ldots\begin{cases} D' = \dfrac{\frac{r}{2}(-1+\sqrt{5})\sqrt{\left[4r^2 - \frac{r^2}{4}(-1+\sqrt{5})^2\right]}}{r} = \\ \frac{r}{2}(-1+\sqrt{5})\sqrt{4 - \frac{1}{4}(6-2\sqrt{5})} = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}; \\ \text{epperò } r = \dfrac{2D'}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}. \end{cases}$$

Facendo in (II) (150) $D' = \frac{r}{2}\sqrt{-1+\sqrt{5}}$, si avrà per m il lato del poligono regolare di 20 lati da iscriversi nel cerchio e così potrà continuarsi progressivamente ed indefinitamente per avere i lati de'poligoni regolari di 40, 80, 160... lati.

154. Il lato del decagono è $\frac{r}{2}(-1+\sqrt{5})$, e quello dell'esagona è r: la somma de'quadrati di questi due lati sarà $\frac{r^2}{4}(10-2\sqrt{5})$ ch'è il quadrato del lato del pentagono. Adunque *il quadrato del*

lato del pentagono regolare iscrittibile nel cerchio è eguale alla somma de' quadrati del raggio e del lato del decagono regolare.

155. Se determiniamo in (I) (150) il valore di m per mezzo di D', n, r; tralasciando il segno $+$ nel radicale, come abbiamo fatto (149) per avere col mezzo della formola (II) il lato dell'esagono regolare per quello del triangolo equilatero, avremo

$$(E)\ m=\frac{D'\sqrt{4r^2-n^2}-n\sqrt{4r^2-D'^2}}{2r};$$

della quale formola possiamo far uso per determinare la corda di un arco, ch'è la differenza di due altri archi, per mezzo delle corde di questi.

156. Quindi essendo $\frac{circonf}{6}-\frac{circonf}{10}=\frac{circonf}{15}$, la cui corda è il lato del pentedecagono regolare iscrittibile nel cerchio, ne segue che se nella formola (E) facciasi $D'=r=\text{corda}\,\frac{circonf}{6}$; ed $n=\frac{r}{2}(-1+\sqrt{5})=\text{corda}\,\frac{circonf}{10}$, si avrà per m il lato del pentedecagono. Fattane la sostituzione e la riduzione, e chiamando p il predetto lato, sarà

$$(\text{VII})\ldots\ p=\frac{r}{4}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3});\ \text{onde}$$

$$r=\frac{4p}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}}.$$

E ponendo per D' questo valore di p in (II) (150), si avrà per m il lato del poligono regolare di 30 lati, e potranno parimente aversi nello stesso modo i lati de' poligoni regolari iscrittibili di 60, di 120, di 240... lati.

157. Dalle cose dette risulta che noi possiamo iscrivere nel cerchio il triangolo equilatero, il quadrato, il pentagono e'l pentedecagono, e i poligoni regolari che dipendono da questi quattro poligoni originarii, quando ciascuno degli archi sottesi da' lati di essi si divide successivamente per metà. Dovremmo ora dimostrare che

questi sono i soli poligoni regolari che si possono iscrivere colla geometria elementare cioè colla retta e col cerchio, ossia analiticamente per mezzo di equazioni di primo e secondo grado solamente: ma la teorica che a ciò conduce è fondata sull'analisi indeterminata ed è assai superiore ad una istituzione elementare. Il celebre Gaus se n'è occupato in una sua profonda e difficilissima opera, ove risguardando i poligoni di un numero dispari di lati, ha dimostrato che colla geometria elementare si può iscrivere nel cerchio il poligono regolare di 2^n+1 lati purchè 2^n+1 sia un numero primo, nella quale formola è compreso il poligono regolare di 17 lati che si ha facendo $n=4$, poichè 17 è numero primo.

Ma il seguente ragionamento ch'equivale ad una dimostrazione empirica della iscrizione esclusiva de'poligoni di 3, 4, 5, 15 lati, potrà esser utile a'giovanetti.

Se noi dimostriamo iscrittibile colla geometria elementare il poligono regolare di 60 lati; poichè 60 è uno de' maggiori divisori di 360°, potremo trarne i poligoni originarii di n lati quando n è fattore di 60. Infatti quando fosse iscritto nel cerchio il poligono regolare di 60 lati, unendo gli archi a 20 a 20 con delle corde, ne risulterà il triangolo equilatero; unendoli a 15 a 15 si avrà il quadrato; tirando le corde a quegli archetti presi a 12 a 12 ne risulterebbe il pentagono regolare, e finalmente unendo le corde a 4 a 4 si avrà il pentedecagono. Ma il poligono regolare di 7 lati, di 9 di 11... non potrebbero iscriversi colla geometria elementare, perchè 7, 9, 11... non sono fattori di 60.

Or egli è agevole l'iscrivere nel cerchio colla geometria elementare il poligono regolare di 60 lati. Infatti essendo sen $36=\frac{1}{2}$ del lato del pentagono, e sen $30=\frac{1}{2}r$; si avrà facilmente il seno di $6^\circ=\text{sen}(36^\circ-30^\circ)$; epperò si avrà la corda di $12^\circ=2\,\text{sen}\,6^\circ$: e quindi sostituendo per D' il valore della corda di 12° nella formola (II) (150); cioè in $D'=\frac{m\sqrt{4r^2-m^2}}{r}$, si avrà m ch'è la corda di 6°, ossia il lato del poligono regolare di 60 lati. Laonde i soli poligoni regolari originarii di 3, 4, 5 e 15 lati sono iscrittibili

nel cerchio, essendo 3, 4, 5, 15 fattori di 60. I numeri 6 e 12 sono anche fattori di 60, ma l'esagono e'l dodecagono dipendono dal poligono regolare di tre lati; così pure i poligoni di 10 e di 20 lati, numeri fattori di 60, dipendono dal poligono di 5 lati; e 'l poligono regolare di 30 dipende da quello di 15.

158. Supponiamo che AC (Fig. 41) sia il lato di un poligono iscrittibile nel cerchio coll' ajuto della sola geometria elementare si avrà subito LL' lato del poligono circoscritto simile all'iscritto; poichè è $LL'=\frac{AC.HB}{Hb}$; e fatto $AC=m$, $HB=r$, e $LL'=m'$, sarà

$$\text{(VIII)}\ldots\ m'=\frac{2mr}{\sqrt{4r^2-m^2}};\ \text{epperò}$$

$$\text{(IX)}\ldots\ m=\frac{2rm'}{\sqrt{4r^2+m'^2}}$$

le quali formole ci mostrano la scambievole dipendenza de' problemi dell'iscrizione e della circoscrizione de' poligoni regolari nel cerchio; poichè danno un lato per l'altro; 1° *il lato del poligono circoscritto per mezzo di quello dell'iscritto e del raggio del cerchio*; 2° *il lato del poligono iscritto per mezzo del circoscritto e del raggio.*

159. (Fig. 41). Sia $AC=b$ il lato di un poligono iscritto, e $BC=a$ il lato del poligono iscritto di un doppio numero di lati: la formola fondamentale applicata a' triangoli AHC, BHC darà

$$AC=b=2r\cos HCA;\ BC=a=2r\cos HCB;$$

epperò, essendo $\cos HCB<\cos HCA$, sarà $BC<AC$. Adunque *il lato di un poligono è minore del lato del poligono di un numero minore di lati.*

160. (Fig. 41). Sia CA' il lato del poligono doppio di lati di quello il cui lato è CB, la formola fondamentale applicata al triangolo ABC darà $AC=2BC\cos BCA$...(1), ed applicata al triangolo BCA' darà $BC=2A'C\cos A'CB$...(2): sostituendo in (1) il valore di BC preso da (2), essa diverrà $AC=4A'C\cos A'CB\cos BCA$: ma

l'equazione (2) dà $2BC=4A'C\cos A'CB$; sicchè sarà $2BC>AC$; epperò $2nBC>nAC$; cioè *il perimetro del poligono iscritto di un doppio numero di lati è maggiore del perimetro del poligono di un minor numero di lati.*

Si ha $Hb=r\cos AHb$; $Hn=r\cos AHn$; ma è $\cos AHn>\cos AHb$: adunque sarà $Hn>Hb$. Cioè l'apotema del poligono di un maggior numero di lati è maggiore dell'apotema del poligono di minor numero di lati. Epperò crescendo indefinitamente il numero de' lati del poligono iscritto, crescerà indefinitamente l'apotema finchè differisca dal raggio per una quantità inassegnabile.

Adunque *i perimetri de' poligoni iscritti tendono sempre più a crescere e ad avvicinarsi alla circonferenza, come va crescendo il numero de' lati, e col crescere del numero di lati, l'apotema cresce sempre più, avvicinandosi sempre a raggiungere il valore del raggio.*

Quando una quantità crescendo o diminuendo si avvicina sempre ad un'altra quantità, sino a differirne per una quantità inassegnabile, questa dicesi *limite* per rispetto alla prima (29).

Sicchè crescendo indefinitamente il numero de' lati de' poligoni iscritti, *il perimetro del poligono giunto al limite differirà per una quantità inassegnabile dalla circonferenza e la sua superficie da quella del cerchio. E l'apotema al limite è eguale al raggio del cerchio.*

161. (Fig. 41). Sia LL' il lato del poligono circoscritto di n lati, ed MM' il lato del poligono circoscritto di un doppio numero di lati; sarà

$$LL'=2HL\cos L\ldots (1);\quad MM'=2HM\cos M\ldots (2);$$

ma è $HL>HM$, e $\cos L>\cos M$ (15); adunque sarà $LL'>MM'$. Cioè *i lati de' poligoni circoscritti al cerchio diminuiscono come cresce il numero di essi.*

162. Abbiamo (fatto $MHM'=H$),

$$MM'=2MK=2r\operatorname{tang}\frac{H}{2}\ (54\ (5)\ \text{e}\ (6))\ldots (1);$$

$$LB = r \operatorname{tang} H = \frac{2r \operatorname{tang} \frac{H}{2}}{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{H}{2}} \quad (72) \ldots (2);$$

ma in riguardo a' poligoni circoscritti al cerchio la quantità $\operatorname{tang} \frac{H}{2}$ è sempre una frazione; poichè il maggior valore che può avere H è di 60°, quando LL' è il lato del triangolo equilatero circoscritto; adunque il 2° membro dell'equazione (2) è $>$ del 2° membro di (1); epperò sarà $MM' < LB$, e $2MM < LL'$, e perciò $2nMM' < nLL'$. Adunque il perimetro del poligono circoscritto diminuisce sempre più come cresce il numero de' lati, e si approssima alla circonferenza. Epperò *la circonferenza è il limite comune de' perimetri de' poligoni iscritti e circoscritti, e il cerchio delle superficie di essi.*

163. Segue da ciò che il perimetro di un poligono iscritto giunto al limite è minore della circonferenza di una quantità inassegnabile; laddove n' è maggiore di una quantità anche inassegnabile il perimetro del poligono simile circoscritto. Adunque *se si determina il valore numerico del lato del poligono iscritto e del circoscritto di un gran numero di lati, per quanto meno questi differiranno, tanto più si avvicineranno al valore della circonferenza. In tal caso sarà permesso di sostituire alla circonferenza l' espressione nL del perimetro del poligono iscritto o circoscritto e se l indica il lato del poligono iscritto ed l' il lato del poligono simile circoscritto, si giungerà ad un' approssimazione anche maggiore, facendosi circonferenza* $= \frac{n(l + l')}{2}$.

Siccome il perimetro del poligono iscritto e circoscritto al cerchio diviene nel suo limite eguale alla circonferenza del cerchio da cui differisce solamente per una grandezza inassegnabile, così la superficie di detti poligoni al limite pareggia nello stesso modo quella del cerchio.

Segue da ciò 1° *che la superficie del cerchio è eguale a tante*

unità quadrate quanto è il prodotto delle unità lineari che comprende la sua circonferenza per quelle contenute nella metà del raggio (146); 2° *che le superficie de' cerchi sono fra loro come i quadrati de' raggi, e le circonferenze come i semplici raggi* (147).

164. Egli è tempo ora di occuparci a determinare il lato l del poligono iscritto giunto al limite. Se cominceremo dal lato dell'esagono, avremo successivamente coll'ajuto della formola (II) (150) i lati de' poligoni di 12, di 24, di 48, 96, 192.... sino ad una certa approssimazione. Se cominceremo dal lato del quadrato iscritto, avremo successivamente coll' ajuto della stessa formola i lati de' poligoni regolari di 8, 16, 32, 64, 128.... lati sino ad una cert' approssimazione. Se cominceremo dal lato del pentagono, la stessa formola (II) (150) ci darà successivamente i lati de' poligoni iscritti di 10, 20, 40, 80, 160, 320... lati sino ad una soddisfacente approssimazione. Il lato del pentedecagono ci guiderà coll'ajuto della stessa formola a' lati de' poligoni iscritti di 30, di 60, di 120, di 240... sino ad una soddisfacente approssimazione. Cominciando la calcolazione dal lato del pentedecagono si giunge più sollecitamente a de' poligoni iscritti di un gran numero di lati: ma poichè l'espressione del lato dell'esagono è 1 (ossia il raggio) e quella del lato del quadrato è $\sqrt{2}$; perciò sarà più agevole il cominciare le calcolazioni da uno di questi lati. Principiamo dall'esagono e facciamo $r=1$, sarà 1 il lato dall'esagono iscritto; e fatto $D'=1$ nella formola (II, 150) si avrà $m=$ lato del dodecagono $=0,5176$: facciasi $D'=0,5176$, si avrà il lato del poligono di 24 lati $=0,2610$; si continuerà così e si avrà il lato del poligono di 48 $=0,1308$; il lato del poligono iscritto di 96 lati $=0,0654$; epperò il perimetro del poligono regolare di 96 lati iscritto $=6,2784$.

Per avere il perimetro del poligono circoscritto di 96 lati si ricorrerà alla formola (VIII) (158); cioè $m' \frac{2mr}{\sqrt{4r^2-m^2}}$; onde avremo, perimetro circoscritto di 96 lati $= \frac{2.96.0,0654}{\sqrt{4-(0,0654)^2}} = 6,2820$.

Osservando questi perimetri si vede che i perimetri de' poligoni

iscritto e circoscritto di 96 lati differiscono appena di 0,0036 (a parti 10 mill.e); cosicchè ciascuno di essi differisce ancor meno dalla circonferenza loro limite comune, il cui valore è medio fra' perimetri de' due predetti poligoni. Epperò se facciamo

$$circ.\ del\ raggio\ 1 = \frac{1}{2}\,(perim.\ iscritto + perim.\ circoscr.)\ di\ 96\ lati$$

avremo 6,2802 che eccede il perimetro del poligono iscritto di 96 lati di soli 0,0018, e di altrettanto è minore del perimetro circoscritto di 96 lati: epperò il numero 6,2802, nell'ipotesi di $r=1$, potrà prendersi in una prima approssimazione come l'espressione della circonferenza circolare, ossia come il rapporto della circonferenza al raggio 1: questo rapporto diviene 3,1401 quanto si riferisce al diametro preso per unità. Con una maggiore approssimazione si sarebbe avuto 3,14159. Adottando la notazione ricevuta per lo indicato rapporto, faremo $3,14159=\pi$, che nelle calcolazioni le quali non esigono una grande esattezza suol ridursi anche a 3,142, e anche 3,14.

165. Siavi un cerchio il cui raggio è r sarà $1 : 2r = \pi : 2r\pi$ *formola generale della circonferenza per riguardo alla notazione generale r del raggio*. Sicchè sarà $180^\circ = r\pi$. Epperò sarà (155)

$$cerchio = 2r\pi \,.\, \frac{r}{2} = \pi r^2$$ *formola generale della superficie del cerchio per rispetto alla notazione generale r del raggio.*

166. Noi possiamo ora esibire una retta eguale ad un dato arco, o l'arco che corrisponde ad una data retta L. Infatti sia A° un dato arco, e sia r il raggio del medesimo, si avrà

$180^\circ : A^\circ = r\pi : L = \frac{A}{180} r\pi$; e sarà questa l'espressione della retta eguale al dato arco, o come suol dirsi sarà

$$arco\ A\ rettificato = \frac{A}{180} . r\pi \ldots\ (1),$$ in cui $\frac{A}{180}$ *è un numero astratto, riducendosi A e 180° alle stesse unità angolari.*

All'opposto scrivendo la proporzione quassù riferita così $r\pi : L = 180.3600'' : A$, si assegnerà col raggio r il numero de'gradi, primi secondi ec. dell'arco A lungo quanto è la retta L.

Quindi, volendo ritrovare i gradi minuti primi e secondi di un arco lungo quanto il raggio del cerchio, si dedurrà da $r\pi = 180$ e ridotto in arco, sarà $r = \frac{180.3600''}{\pi} = 57°, 18' 24''$ approssimativamente.

167. Supponiamo due diametri perpendicolari che dividano il cerchio in quattro settori quadranti; sarà

$$\text{Sett. quadr.} : \text{cerchio} = 1 : 4 = 90° : 360° \ldots (1).$$

Supponiamo il settore quadrante suddiviso in n altri settori s il cui arco sia α; sarà

$$s : \text{Settore quadrante} = \alpha : n\alpha = \alpha : 90° \ (a) \ldots (2):$$

moltiplicando termine a termine le due proporzioni (1) e (2) sarà $s : \text{cerchio} = \alpha : 360$. Cioè ogni settore è *al cerchio come l'arco che limita il settore è alla circonferenza.*

168. Sostituendo in questa proporzione πr^2 al cerchio e $2r\pi$ alla circonferenza, ne risulterà $s = \alpha \frac{r}{2}$; ma per ristabilire l'omogeneità di questa formola bisogna sostituire ad α la quantità $\frac{\alpha}{180} r\pi$ (166); onde la formola del settore sarà

$$s = \frac{\alpha}{180} \pi r . \frac{r}{2} = \frac{\alpha}{360} \pi r^2 \ldots (1)$$

la quale si enuncia così; la *superficie di un settore è eguale a tante unità quadrate quanto è il prodotto delle unità lineari che si contenga nel suo arco rettificato per quella che contiene la metà del raggio:* oppure *è eguale alla superficie del cerchio di cui fa parte moltiplicato per lo rapporto dell'arco del settore a* 360°.

169. Se s' è un altro settore il cui arco sia α' e r' il raggio,

(a) Il caso di α incommensurabile con 90° non offre difficoltà.

sarà $s : s' = \alpha r^2 : \alpha' r'^2$, dopo di aver ridotti α, α' alla stessa unità angolare, cioè a gradi, a minuti primi, a secondi ec.

Due settori si dicono simili, quando sotto raggi diseguali gli archi α, α' hanno lo stesso numero de' gradi, primi ec.; e sotto la stessa condizione sono simili i segmenti.

Epperò se due settori s, s' sono simili sarà

$$s : s' = \alpha r^2 : \alpha r'^2 = r^2 : r'^2 = \pi r^2 : \pi r'^2.$$

Cioè *i settori simili sono fra loro come i quadrati de' loro rispettivi raggi, o come i cerchi de' quali essi fanno parte.*

170. Siano simili due segmenti e perciò anche i settori; saranno pure simili i triangoli fatti da' raggi rispettivi e dalle respettive corde (44). Chiamiamo S, S' i settori; s, s' i segmenti, e t, t' i triangoli rispettivi predetti; sarà $s = S - t$; $s' = S' - t'$.

Avremo dunque $S : S' = r^2 : r'^2 = t : t'$ (169 e 117); epperò $S : S' = t : t'$; e quindi $S - t : S' - t' = t : t' = r^2 : r'^2$; cioè $s : s' = r^2 : r'^2$. Cioè *i segmenti simili sono come i quadrati de' raggi.*

171. (Fig. 41). Abbiamo triangolo

$$AHC = \frac{r^2}{2} \operatorname{sen} AHC \ (113) = \frac{r^2}{2} \operatorname{sen} \alpha, \text{ facendo } AHC = \alpha; \text{ quindi}$$

$$s = S - t = \frac{\alpha}{360} . \pi r^2 - \frac{r^2}{2} \operatorname{sen} \alpha = \frac{\alpha}{360} \pi r^2 - r \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} . r \cos \frac{\alpha}{2} \ldots (2),$$

ch'è l'espressione del segmento circolare limitato dall'arco α nel cerchio del raggio r.

172. (Fig. 41 e 42). Si potrebbe aver bisogno di conoscere lo spazio mistilineo $DQQ'D'$ compreso fra il diametro e una corda qualunque QQ', o fra due corde comunque tirate PP', QQ'. A tal oggetto avremo

$DQQ'D'$ = semicerchio — segmento QIQ
$DPP'D'$ = semicerchio — segmento PIP'; sicchè sarà
$PQQ'P' = DQQ'D' - DPP'D'$.

Ponendo le rispettive formole del semicerchio e del segmento, con porre arco $PIP'=\alpha$, arco $QIP'=\alpha'$, avremo

$$DQQ'D'=\frac{r^2}{2}\left[\pi\left(1-\frac{\alpha'}{180}\right)+\operatorname{sen}\alpha'\right],\ (\alpha'=QIQ')$$

$$DPP'D'=\frac{r^2}{2}\left[\pi\left(1-\frac{\alpha}{180}\right)+\operatorname{sen}\alpha\right],\ (\alpha=PIP')$$

$$PQQ'P'=\frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{\alpha-\alpha'}{180}\right)-\frac{r^2}{2}(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\alpha'):$$

ove si noti essere pel segmento minore del semicerchio

$$1-\frac{\alpha}{180}>0;\ 1-\frac{\alpha'}{180}>0;\ \text{e di più per ipotesi}$$

$$\frac{\alpha-\alpha'}{180}>0 \text{ e } <1;\ \operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\alpha'>0.$$

E parimente sarà

$$DM'D'P'P=DM'D'+DPP'D'=r^2\left[\pi\left(1-\frac{\alpha}{360}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\right].$$

Alcuni facilissimi problemi per esercizio de' giovanetti.

Problema trigonometrico. Il problema trigonometrico si enuncia così. « Date tre parti di un triangolo, determinare numerica« mente le altre tre ». Trattandosi de' triangoli piani, il problema sarebbe indeterminato se i dati fossero i tre angoli (76, 78 pag. 82); epperò almeno un lato dee far parte de' tre dati in tutt'i problemi trigonometrici piani. Cominciamo da' triangoli rettangoli.

Cinque sono gli elementi problematici del triangolo rettangolo, giacchè l'angolo retto è dato. Due di questi cinque essendo noti (coll'angolo retto) gli altri tre si cercano. In ogni problema dunque entrano tre quantità, due note ed una ignota: epperò li cinque elementi predetti combinati a 3 a 3 daranno tutt'i problemi

che possono formarsi co' dati de' triangoli rettangoli. Or cinque quantità combinate a 3 a 3 danno 10 combinazioni le quali si ridurranno alle seguenti quattro, si suppone $A=90^o$

1ª a, b, c: 2ª a, b, C; a, b, B: 3ª B, C, b; B, C, c; B, C, a: 4ª a, b, B; a, c, C; b, c, B; b, c, C.

La 4ª dà

1. L'ipotenusa per un lato e l'angolo adjacente o opposto
2. Un catetto per mezzo dell'ipotenusa e degli angoli
3. Un angolo per mezzo dell'ipotenusa e un catetto

} Si ricorrerà alle formole del n.º 54; cioè (54, (1), (2), (3), (4))

4. Un angolo per mezzo de'due catetti
5. Un catetto per l'altro e gli angoli

} (54, (5), (6)).

La 3ª è insignificante, poichè dà

Un lato per mezzo degli angoli... indeterminato (78, pag. 87)

Un angolo per mezzo dell'altro e di un lato qualunque. Questo lato è superfluo (30).

La 2ª dà

L'ipotenusa per un catetto e gli angoli... Caso identico al 1. della 4ª

Un catetto per l'ipotenusa e gli angoli... Caso identico al 2. della 4ª

Un angolo per l'ipotenusa è un catetto... Caso identico al 3. della 4.ª

La 1ª dà

6. L'ipotenusa per mezzo de'due catetti. Si determinerà prima un angolo (4. della 4ª) e poi l'ipotenusa: o pure si ricorrerà al n.º 27 pag. 22.

7. Un catetto per l'ipotenusa e l'altro. Si determinerà prima un angolo (3. della 4ª) e poi il catetto che si chiede.

Triangoli obbliquangoli. I sei elementi de'triangoli obbliquangoli, tre lati e tre angoli, debbono combinarsi a quattro a quattro, affinchè uno di essi possa esser determinato per tre altri Sei quantità

a quattro a quattro danno 15 combinazioni $\left(\frac{6.5.4.3}{2.3.4}=\frac{6.5}{2}\right)$; e queste riduconsi alle seguenti quattro differenti

1ª $a, b, c, A; a, b, c, B; a, b, c, C$: 2ª $a, b, A, B; a, c, A, C$: b, c, B, C: 3ª $A, B, C, a; A, B, C, b; A, B, C, c$; 4ª a, b, A, C; $a, b, B, C; a, c, A, B; a, c, C, B; b, c, C, A; b, c, B, A$.

La 1ª dà

1. Un angolo per mezzo de'tre lati... pag. 72 e 73, le formole (T) o (U) o (V).

2. Un lato per mezzo degli altri due e dall'angolo da questi compreso. Si determinerà prima un altro angolo per mezzo delle formole (1), o (2) (75 pag. 78 e 79), e poi il lato che si domanda per mezzo della formola (55 pag. 50) $a \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} A$. Si rifletta a ciocchè sta detto dal § 74 al § 78.

3. Un lato per mezzo degli altri due e dell'angolo opposto ad uno di essi. Si determinerà prima l'angolo opposto all'altro lato colla formola $a \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} A$, e poi colla stessa formola il lato che si cerca.

La 2ª dà

4. Un angolo per mezzo di due lati e dell'angolo opposto ad uno di essi; e s'impiegherà la formola $b \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} b$

5. Un lato per mezzo degli angoli e di un altro lato. Si farà uso della stessa formola.

La 3ª dà

Un lato per mezzo de'tre angoli. Il problema è indeterminato (78).

Un angolo per mezzo degli altri angoli e di un lato. Questo terzo lato è superfluo, poichè basta la conoscenza di due angoli per aver il terzo (30).

Da ultimo la 4ª dà

6. Un angolo per mezzo di due lati e dell'angolo da questi compreso. Si farà uso della formola (1) o (2) (75 pag. 78 e 79); o dalla formola (4) (pag. 75) che darà $B-C$, e poichè è pure noto $B+C=180-A$, si conosceranno nel tempo stesso gli altri

due angoli. Si avverta a tutto ciò che ivi abbiamo sviluppato dal n.° 74 pag. 74 al n.° 78 pag. 81.

Un angolo per mezzo di due lati e dell'angolo opposto ad uno di essi. Questo caso è identico al primo della 2.ª

Un lato per mezzo degli angoli e di un altro lato. È identico al secondo caso della 2.ª

1° (Fig. 43). *Si domanda tirare da un punto C' preso nell'angolo ABC una retta $AC'C$ in modo che AC, AC' siano nella data ragione di $m : n$.*

Fatto $AC'=b'$, $AC=b$, $AB=c$, sarà $b=\frac{m}{n}b'$. Da C' tiriamo una retta $C'B'$ di cui or impareremo a conoscere la posizione e sia $AB'=c'$. La formola fondamentale applicata a' triangoli ABC, $AB'C'$ darà

$$b=\frac{m}{n}b'=a\cos C+c\cos A,\ b'=a'\cos C'+c'\cos A:$$

moltiplicando questa seconda per $\frac{m}{n}$, e sottraendo dalla prima si avrà

$$a\cos C-\frac{m}{n}a'\cos C'+\left(c-\frac{m}{n}c'\right)\cos A=0\ .$$

la quale dà

$$a=\frac{m}{n}a';\ C=C';\ c-\frac{m}{n}c'=0,\ \text{cioè}\ \frac{a}{a'}=\frac{m}{n}=\frac{c}{c'};\ \text{cioè}$$

$$BC : B'C'=BA : B'A=m : n=CA : C'A:$$

epperò sarà $B'C'$ parallela a BC. Adunque rimarrà risoluto il problema, tirando $C'B'$ parallela a CB; prendendo $B'A$ in modo che sia $BA : B'A=m : n$, e facendo passare per A e C' la retta $AC'C$.

2° (Fig. 44). *Si domanda determinare l'angolo che fanno le rette Cm, Cn perpendicolari ad Am, An.*

Si unisca CA, e si chiamino α, β gli angoli di CA con An, Am e φ, θ gli angoli di CA colle rispettive perpendicolari Cn, Cm avremo $\varphi=90-\alpha$, $\theta=90-\beta$; quindi

$\varphi+\theta=180-a=180-(\alpha+\beta)$; epperò $a=\alpha+\beta=A$.

3° (Fig. 43). *Si cerca abbassare da un punto C una perpendicolare sulla retta indefinita AB.*

Si prenda un punto A in AB; si unisca CA, e si prenda $AB = AC \cos A$, la perpendicolare sarà $CB = AC \operatorname{sen} A$.

4° (Fig. 45). *Da un punto B si domanda innalzare una perpendicolare ad AB.*

Si prenda BA a piacere, e tirando da A una retta AL che faccia un angolo acuto con AB, si prenda $AC = \frac{AB}{\cos A}$, sarà $CB = AC \operatorname{sen} A$.

5° (Fig. 45). *Si domanda dividere una retta AD per metà.*

Facciasi in A un angolo $DAC < 90$; e prendasi $AC = \frac{AD}{2 \cos A}$; facciasi $AB = AC \cos A$, sarà AB la metà di AD. Infatti è

$$AD = 2AC \cos A; \text{ epperò } \frac{AD}{2} = AC \cos A = AB.$$

6° (Fig. 45). *Si domanda dividere un angolo ACD per metà.*

Ne' lati di questo angolo prendasi $CA = CD$; e facciasi $AD = 2AC \operatorname{sen} \frac{C}{2}$; la CB che si tira da C sulla metà di AD dividerà l'angolo dato C per metà. Infatti è $\operatorname{sen} ACB = \frac{AB}{AC} = \operatorname{sen} \frac{C}{2}$.

7° (Fig. 45). *Da un punto C si domanda tirare una parallela a AD.*

Tirisi la perpendicolare CB ad AD, e preso un punto A a piacere in DA facciasi $CL = CA \cos A = CA \cos ACL$; sarà CL la parallela cercata. Infatti è $CL = CA \cos ACL = CA \cos A$; dunque $ACL = A$; epperò CL parallela ad AD.

8° (Fig. 43). *Si domanda di fare ad un punto B'' della A''B'' un angolo eguale al dato angolo B.*

Si prenda BC a piacere in un lato BD del dato angolo: si alzi la perpendicolare CA finchè incontri l'altro lato in A; indi

preso $B''C''=BC$ ed, alzata da C' la perpendicolare $C'A''$, facciasi $C''A''=CB \operatorname{tang} B$; e si unisca $A''B''$, sarà $B''=B$. Ed infatti è $A''C''=CB \operatorname{tang} B$; ma è $A''C''=C''B'' \operatorname{tang} B''$; dunque $CA=C''A''$, e $B=B''$.

9° *Si domanda costruire un parallelogrammo su di una retta data a che sia eguale ad un altro e gli sia equiangolo.*

Chiamo φ un angolo del dato parallelogrammo, ed m^2 la sua superficie; sia b l'altro lato ignoto del parallelogrammo che si cerca: e facciasi $b=\frac{m^2}{a \operatorname{sen} \varphi}$. Il parallelogrammo che si cerca avrà per lati a, b i quali comprenderanno l'angolo φ.

Se doveasi costruire un triangolo colle stesse condizioni, si sarebbe fatto $b=\frac{2m^2}{a \operatorname{sen} \varphi}$; e i lati del triangolo sarebbero stati a, b che comprenderebbero l'angolo φ.

10° *Siano m, m', m''... le parti di una retta: si domanda dividere un'altra retta, in modo che le sue parti n, n', n''..... siano proporzionali alle altre m, m', m''.*

La quistione rimarrà risoluta facendo $n'=n.\frac{m'}{m}$; $n''=n.\frac{m''}{m}$; $n'''=n.\frac{m'''}{m}$ ec., che darà $n''=m''.\frac{n'}{m'}$ ec.

11° *Costruire su di un dato arco a^o un settore che sia al cerchio il cui raggio è R come $m : n$.*

Chiamando x il raggio ignoto del settore che si domanda, la superficie di questo settore sarà $\frac{\pi x^2}{2}.\frac{a^o}{180^o}$: e l'equazione che risolve la quistione sarà $x^2-\frac{2m}{n}R^2.\frac{180^o}{a^o}=0$, in cui $\frac{180}{a}$ ridotto alla stessa specie angolare rappresenterà un numero astratto.

12° *Si domanda di costruire col raggio r un settore che sia al cerchio del raggio R come $m : n$.*

Fatto x^o l'arco del settore che si cerca, la retta eguale a que-

st' arco sarà $\pi r . \frac{x^0}{180^0}$; ed il settore sarà $\frac{\pi r^2}{2} . \frac{x^0}{180}$. Epperò il problema sarà risoluto dall' equazione $x^0 = \frac{2mR^2}{nr^2} . 180^0$.

13° *Si domanda un segmento circolare che sia al cerchio del raggio R come m : n.*

L'equazione che risolve la quistione è (171)

$$\frac{\alpha}{360} - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2\pi} = \frac{m}{n}\frac{R^2}{r^2}.$$

Se è dato l'arco α si determinerà facilmente r; ma se cercasi l'arco converrà prima esprimere α per sen α, o sen α per α (lo che non può farsi che col mezzo delle serie).

14° *Dati $b+c$, a, A risolvere il triangolo.*

Abbiamo

$b : c = \operatorname{sen} B : \operatorname{sen} C$; epperò $b+c : c = \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C : \operatorname{sen} C$;

ma è

$c : a = \operatorname{sen} C : \operatorname{sen} A$; adunque $b+c : a = \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C : \operatorname{sen} A =$;

cioè

$$b+c : a = 2\operatorname{sen}\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} : \operatorname{sen} A;$$

che darà l'equazione

$$\cos\frac{B-C}{2} = \frac{(b+c)\operatorname{sen} A}{2a\operatorname{sen}\frac{B+C}{2}} = \frac{(b+c)}{a}\operatorname{sen}\frac{A}{2}\ldots (1).$$

Quindi sarà noto $\frac{B-C}{2}$, ed essendo pure noto $\frac{B+C}{2}$, sarà noto B, C, epperò b, c.

Lo stesso problema si risolve facilmente per mezzo della nostra formola cardinale così

Si ha = $b = c\cos A + a\cos C \ldots\ c = a\cos B + b\cos A$;

sommando sarà

$$(b+c)(1-\cos A)=a(\cos B+\cos C)=2a\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2},$$

da cui si avrà

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{(b+c)}{a}\operatorname{sen}\frac{A}{2}$$

valore identico al precedente (1).

15° *Dati l'angolo A, il lato b e le superficie S; si domanda risolvere il triangolo.*

La nota formola $S=\frac{bc}{2}\operatorname{sen}A$, dà $c=\frac{2S}{b\operatorname{sen}A}$; onde si conosceranno, b, c e A e il triangolo sarà facilmente risolubile.

16° *Dati S, A, a; si domanda risolvere il triangolo.*

Si determineranno, b, c per mezzo delle due formole

$$S=\frac{bc}{2}\operatorname{sen}A,\quad a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

17° *Dati S, $a+b$, c; si domanda risolvere il triangolo.*

Si conoscerà $a+b+c$ che porremo eguale ad n; e facciasi $a+b=m$, onde sarà $b=m-a$. Sostituendo questi valori nella formola

$$S=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}},$$

si avrà

$$S=\sqrt{\frac{n}{2}\cdot\frac{c+m-2a}{2}\cdot\frac{c-m+2a}{2}\cdot\frac{m-c}{2}},$$

in cui la sola incognita è a. Determinata a si conoscerà B per mezzo della formola $\frac{ac}{2}\operatorname{sen}B=S$, e si avranno a, c, B, cioè due lati e l'angolo compreso: o pure, conosciuta a, sarà nota b, e si conosceranno i tre lati del triangolo.

18° *Dati* $a+b+c$, A, B; *si domanda risolvere il triangolo.*
Avremo

$$\frac{a+b+c}{c}=\frac{\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}C}+1=\frac{2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}(A+B)}+1$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)+\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\ldots(h)$$

questa equazione servirà per determinare c; onde, essendo anche dati A, B, si conosceranno tre elementi del triangolo A, B, c.

Se vorremo far uso nella risoluzione di questo problema della nostra formola cardinale, arriveremo allo stesso risultamento. Infatti le tre formole della nostra equazione cardinale sono

$$a=b\cos C+c\cos B\ldots(1);\ b=a\cos C+c\cos A\ldots(2);$$
$$c=a\cos B+b\cos A\ldots(3)$$

sommando avremo

$$a+b+c=(a+b)\cos C+b\cos A+a\cos B+c(\cos A+\cos B)=$$
$$(a+b)\cos C+c+c(\cos A+\cos B)=-(a+b)\cos(A+B)+c$$
$$+2c\left(\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)=-(a+b)\left(2\cos^2\frac{A+B}{2}-1\right)+c$$
$$+2c\left(\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)=-2(a+b)\cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right)+a+b+c$$
$$+2c\left(\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right);$$

da cui, cancellati i termini identici ne'due membri, si avrà

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\ \text{cioè}\ \frac{a+b+c}{c}=\frac{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}},$$

espressione identica all'altra (h).

19° *Determinare un triangolo di cui si conoscono, la somma p de' lati, la superficie S ed un angolo A.*

Abbiamo $b.c=\frac{2S}{\text{sen}\,A}\ldots$ (1);

$$\text{sen}^2\frac{A}{2}=\frac{\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)}{bc}=\frac{\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)\text{sen}\,A}{2S}\ldots (2).$$

Queste due equazioni faranno determinare b, c; epperò sarà noto anche a, e tutti gli altri elementi del triangolo.

20° (Fig. 46). *Dati gli angoli, un lato $AD=m$ col rapporto di AB a $CD=\frac{1}{c}$; si domanda risolvere il quadrilatero.*

Sulle prime è facile il comprendere come il problema sia determinato, poichè il quadrilatero ha bisogno di 5 dati per esser definito, quanti appunto sono i dati di questo problema. Ciò posto sia $AB=x$, $DC=y$; e supponiamo prolungati CD, BA fino all'incontro Q; sarà dato il triangolo QAD che ha $QAD=180-BAD$, $QDA=180-ADC$ e $AD=m$: quindi nel triangolo QBC si avrà $\frac{p+x}{p+y}=\frac{\text{sen}\,C}{\text{sen}\,B}$; ma $\frac{x}{y}=\frac{1}{c}$ adunque; queste due equazioni fanno conoscere x, y; onde sarà dato il triangolo BQC epperò anche BC.

21° (Fig. 46). *Dati di un quadrilatero le AB, AD, A, D e la superficie S si domanda risolverlo.*

È dato il triangolo BAD di cui si conosce BA, AD ed A: adunque è dato DB e $BDC=D-ADB$. Quindi sarà

$$\frac{BA.AD\,\text{sen}\,A}{2}+\frac{BD.DC\,\text{sen}\,BDC}{2}=S,$$

in cui la sola ignota è DC. Epperò sarà dato il triangolo BCD, di cui conosciamo BD, DC e l'angolo compreso BDC: dunque sarà noto C epperò $B=360-(A+D+C)$; tutto dunque sarà determinato.

22° *Dati di un quadrilatero due lati BA, CD e gli angoli si domanda determinare le rimanenti cose.*

(Fig. 46). Si prolunghino BA, CD fino all'incontro in Q, sarà noto QAD, QDA. Facciasi $AQ=x$, $QD=y$, $AB=a$, $DC=b$; avremo nel triangolo AQD, $\frac{x}{y}=\frac{\operatorname{sen} D}{\operatorname{sen} A}$, e nell'altro BQC, $\frac{a+x}{b+y}=\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B}$; nelle quali due equazioni le ignote saranno x, ed y; determinate le quali si determineranno AD, BC colla formola cardinale applicata a'triangoli AQD, ABC

$$AD=x\cos A+y\cos D;\ BC=(a+x)\cos B+(b+y)\cos C.$$

23° (Fig. 46). *Dati BA, AD e gli angoli, si domanda determinare il quadrilatero.*

Con BA, AD e A si determinerà ADB, ABD e BD, e si renderanno noti CDB, CBD, i quali uniti a DB faranno determinare CD, CB.

24° (Fig. 46). *Dati i tre lati AB, AD, DC cogli angoli B e C, si domanda risolvere il quadrilatero.*

S'intendano prolungati i lati BA, CD verso Q, chiamando $AQ=x$, $DQ=y$, $AB=a$, $DC=b$, avremo tra le ignote x ed y le due equazioni

$$\frac{a+x}{b+y}=\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B};\ \frac{a+b+x+y}{a+x-b-y}=\frac{\operatorname{tang}\frac{C+B}{2}}{\operatorname{tang}\frac{C-B}{2}}.$$

25° *Si domanda di determinare le tre radici dell'equazione di terzo grado del caso irreducibile, coll'ajuto delle formole trigonometriche.*

Facciamo nella formola $\operatorname{sen}(a+b)=\frac{\operatorname{sen} a\cos b+\operatorname{sen} b\cos a}{r}$ (M (64)) $b=2a$; e riducendo per mezzo delle formole di $\operatorname{sen}2b$ $\cos 2b$ (pag. 69); si avrà $\operatorname{sen}3a=3\operatorname{sen}a-\frac{4\operatorname{sen}^3 a}{r^2}$, nella quale

se facciamo $\operatorname{sen} 3a = c$ e $\operatorname{sen} a = x$, avremo l'equazione cubica $x^3 - \frac{3}{4} r^2 x + \frac{1}{4} c r^2 = 0$ che prenderà la forma comunemente adattata $x^3 - px + q = 0$, facendo $\frac{3}{4} r^2 = p$, $\frac{1}{4} c r^2 = q$.

Esaminiamo questa equazione: avremo $\frac{p}{3} = \frac{r^2}{4}$ epperò $\frac{p^3}{27} = \frac{r^6}{64}$; $\frac{q}{2} = \frac{cr^2}{8}$; e $\frac{q^2}{4} = \frac{c^2 r^4}{64}$: quindi l'espressione $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} = \frac{1}{64}(c^2 r^4 - r^6)$; ma è $c < r$; adunque $\frac{1}{64}(c^2 r^4 - r^6) < 0$; epperò $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$: cioè l'equazione $x^3 - \frac{3}{4} r^2 x + \frac{1}{4} c r^2 = 0$ che dà x per c (ossia che fa conoscere il seno della terza parte di un arco per mezzo del seno di questo e del raggio) appartiene al caso irreducibile dell'equazione del 3° grado. Essa dà dunque tre radici reali: cosicchè, volendosi determinare queste tre radici per mezzo d'intersezioni di linee, sono insufficienti a ciò fare la retta e la curva circolare che non possono mai segarsi in più di due punti, ed ecco perchè dicono i geometri che è assolutamente impossibile il risolvere il problema della trisezione angolare colla geometria elementare.

Risulta dall'equazione $x^3 - \frac{3}{4} r^2 x + \frac{1}{4} c r^2 = 0$ che quando si ha un'equazione numerica di terzo grado del caso irreducibile, si paragonerà a questa e si determinerà r e c; ed essendo $c = \operatorname{sen} 3a$ preso col raggio r, si ridurrà al raggio delle tavole ponendo $\frac{c}{r}$ in vece di c e con questo valore si troverà l'angolo il cui seno è $\frac{c}{r}$; e presa la terza parte di quest'angolo, se ne determinerà il seno,

che bisognerà però riferire al raggio r, onde $x=r\,\text{sen}\,a$ sarà una radice. Per determinare le altre due radici si osservi che

$$\text{sen}\,3a=\text{sen}(180-3a)=-\text{sen}(180+3a),$$

$$\text{onde sarà } \text{sen}\,a=\text{sen}(60-a)=-\text{sen}(60+a):$$

epperò le altre due radici saranno

$$x=r\,\text{sen}(60-a;\ x=-r\,\text{sen}(60+a).$$

Diamone un esempio. Sia un'equazione di 3° grado del grado irreducibile $x^3-5x+3=0$: paragonata questa equazione al modulo $x^3-\frac{3}{4}r^2x+\frac{1}{4}cr^2=0$, se ne dedurrà

$$r=\sqrt{\frac{20}{3}}=2\sqrt{\frac{5}{3}};\ c=\text{sen}\,3a=\frac{9}{5};$$

e col raggio delle tavole $\frac{c}{r}=\frac{9\sqrt{3}}{10\sqrt{5}}$. Le tavole daranno

arco(sen$=c$)$=3a=44°, 11', 52''$; e sarà perciò $a=14°, 43', 57'', 20'''$. Arrestandoci a'secondi si avrà

$$x=2\sqrt{\frac{5}{3}}\,\text{sen}\,14°, 43', 57''=0,656625$$

$$x=2\sqrt{\frac{5}{3}}\,\text{sen}(60-a)=2\sqrt{\frac{5}{3}}\,\text{sen}\,45°, 16', 3''=1,834238$$

$$x=-2\sqrt{\frac{5}{3}}\,\text{sen}(60+a)=-2\sqrt{\frac{5}{3}}\,\text{sen}(74°, 43', 57'')=-2,490163.$$

Ed è chiaro che le due prime radici positive sono eguali all'ultima ch'è negativa, come doveva essere, essendo l'equazione data mancante di 2° membro.

Se nell'equazione $x^3-5x+3=0$ si pone $-x$ per x, si avrà l'equazione $x^3-5x-3=0$ le cui radici saranno $x=-0,656625$; $x=-1,834238$; $x=2,490863$.

Risulta da tutto ciò che ogni equazione cubica del caso irredu-

cibile è diretta a dividere in tre parti eguali un certo arco. Gli antichi geometri chiamavano *solidi* i problemi che richiedevano la determinazione di tre radici reali.

Adunque i problemi solidi si riducono alla trisezione di un angolo: epperò il problema della trisezione dell'angolo di sua natura è solido: nè mai può esser risoluto colla retta e col cerchio.

PARTE SECONDA

GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA SFERICA: E PRINCIPALI TEOREMI DI GEOMETRIA SOLIDA.

1. Se da un punto preso nello spigolo di due piani che s'incontrano (9) si tirino due rette perpendicolari allo spigolo stesso, una in un piano e nel secondo piano l'altra, l'angolo di queste rette, ovunque si tirano, crescerà o diminuirà come cresce o diminuisce l'angolo de'piani, e se l'angolo di questi diviene zero o 180°, parimente zero o 180° diviene l'angolo delle rette. Adunque *l'angolo di due piani è misurato dall'angolo rettilineo fatto da due perpendicolari alla comune intersezione di essi, tirate da uno stesso punto di questa, una nel primo piano e l'altra nel secondo.*

2. Un angolo sferico è identico a quello de'piani de'cerchi de' quali fanno parte i due lati di esso. Or se dal punto d'incontro di questi archi si tirino ad essi le rispettive tangenti, queste si troveranno ne'piani rispettivi de'cerchi a'quali appartengono detti archi, e saranno perpendicolari alla comune intersezione de' piani

de'medesimi archi, per essere questa il loro diametro comune (pag. 10) Adunque *l'angolo di queste tangenti sarà identico al predetto angolo sferico.*

3. Ogni lato di triangolo sferico, come arco di cerchio massimo (pag. 10 e § 6 pag. 7), misura l'angolo fatto al centro della sfera da'due raggi tirati dalle sue estremità al centro medesimo.

4. Siano a, b, c i lati di un triangolo sferico, e α, β, γ gli angoli rispettivamente opposti ad essi: suppongasi tirate dal vertice dell'angolo β le tangenti tang$a$, tang$c$, che comprenderanno l'angolo β (2); e dal centro della sfera le rispettive seganti seg$a$, seg$c$ che comprenderanno l'angolo misurato da b (3): e supponiamo uniti i due punti d'incontro delle tangenti colle rispettive seganti con una retta μ, avremo due triangoli rettilinei, i cui lati sono, nel primo tang$a$, tang$c$, μ; e nel secondo seg$a$, seg$c$, μ; a'quali triangoli applicata la nostra formola cardinale darà

$$(1)\ldots \operatorname{tang} a = \operatorname{tang} c \cos\beta + \mu \cos(\mu, \operatorname{tang} a)$$
$$(2)\ldots \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos\beta + \mu \cos(\mu, \operatorname{tang} c)$$
$$(3)\ldots \mu = \operatorname{tang} a \cos(\mu, \operatorname{tang} a) + \operatorname{tang} c \cos(\mu, \operatorname{tang} c)$$
$$(4)\ldots \operatorname{seg} a = \operatorname{seg} c \cos b + \mu \cos(\mu, \operatorname{seg} a)$$
$$(5)\ldots \operatorname{seg} c = \operatorname{seg} a \cos b + \mu \cos(\mu, \operatorname{seg} c)$$
$$(6)\ldots \mu = \operatorname{seg} a \cos(\mu, \operatorname{seg} a) + \operatorname{seg} c \cos(\mu, \operatorname{seg} c).$$

Prendendo da (1) e (2) i valori di $\cos(\mu, \operatorname{tang} a)$, $\cos(\mu, \operatorname{tang} c)$; e sostituendoli in (3), si avrà, dopo di aver tutto ridotto

$$(7)\ldots \mu^2 = \operatorname{tang}^2 a + \operatorname{tang}^2 c - 2 \operatorname{tang} a \operatorname{tang} c \cos\beta.$$

Prendendo parimenti da (4) e da (5) i valori di $\cos(\mu, \operatorname{seg} a)$, $\cos(\mu, \operatorname{seg} c)$, e sostituendoli nella (6); avremo

$$(8)\ldots \mu^2 = \operatorname{seg}^2 a + \operatorname{seg}^2 c - 2 \operatorname{seg} a \operatorname{seg} c \cos b.$$

Sottraendo (7) da (8) e riflettendo che $\operatorname{seg}^2 \varphi - \operatorname{tang}^2 \varphi = 1$, si avrà

$$(9)\ldots 1 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} c \cos\beta - \operatorname{seg} a \operatorname{seg} c \cos b = 0;$$

e per simmetria

$$(10)\ldots 1 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \cos\gamma - \operatorname{seg} a \operatorname{seg} b \cos c = 0.$$

Sostituendo in (9) $\frac{\text{sen}}{\cos}$ a tang ed $\frac{1}{\cos}$ a seg, si avrà

$$\ldots (11) \ldots 1 + \frac{\text{sen}\, a\, \text{sen}\, c \cos\beta - \cos b}{\cos a \cos c} = 0$$

e la (10) si metta sotto la forma

$$(10) \ldots \cos c = \frac{1 + \text{tang}\, a\, \text{tang}\, b \cos\gamma}{\text{seg}\, a\, \text{seg}\, b}:$$

sostituendo questo valore di cos$c$ nel denominatore di (11), si avrà

$$1 + \frac{\text{sen}\, a\, \text{sen}\, c \cos\beta - \cos b}{\cos a \, \frac{1 + \text{tang}\, a\, \text{tang}\, b \cos\gamma}{\text{seg}\, a\, \text{seg}\, b}} = 0$$

sostituendo $\frac{\text{sen}}{\cos}$ a tang e $\frac{1}{\cos}$ a seg; e moltiplicando amendue i termini del denominatore per cos$a$ cos$b$, si avrà

$$1 + \frac{\text{sen}\, a\, \text{sen}\, c \cos\beta - \cos b}{\cos a (\cos a \cos b + \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b \cos\gamma)} = 0; \text{ cioè}$$

$$\cos^2 a \cos b + \text{sen}\, a \cos a\, \text{sen}\, b \cos\gamma + \text{sen}\, a\, \text{sen}\, c \cos\beta - \cos b = 0$$

e sostituendo $1 - \text{sen}^2 a$ a $\cos^2 a$ e riducendo si avrà

$$\text{sen}\, a \cos b - \cos a\, \text{sen}\, b \cos\gamma - \text{sen}\, c \cos\beta = 0.$$

Questa è la formola fra cinque elementi del triangolo sferico, com'era per rispetto a'triangoli rettilinei la nostra formola fondamentale, da cui la precedente equazione è stata dedotta. Questa formola sarà per noi la equazione cardinale della trigonometria e della geometria sferica; sebbene essa non comprenda tutti gli elementi del triangolo sferico (*a*) come la formola fra cinque elementi del triangolo rettilineo. Questa equazione, combinando varia-

(*a*) Vedremo fra breve che nel triangolo sferico, dati due angoli non è dato il terzo.

mente i lati e gli angoli, dà luogo al seguente sistema di sei formole di una stessa equazione.

$$(F)\ldots\begin{cases}\operatorname{sen}c\cos\beta+\operatorname{sen}b\cos a\cos\gamma=\operatorname{sen}a\cos b\ldots(1)\\ \operatorname{sen}b\cos\gamma+\operatorname{sen}c\cos a\cos\beta=\operatorname{sen}a\cos c\ldots(2)\\ \operatorname{sen}c\cos\alpha+\operatorname{sen}a\cos b\cos\gamma=\operatorname{sen}b\cos a\ldots(3)\\ \operatorname{sen}a\cos\gamma+\operatorname{sen}c\cos b\cos\alpha=\operatorname{sen}b\cos c\ldots(4)\\ \operatorname{sen}b\cos\alpha+\operatorname{sen}a\cos c\cos\beta=\operatorname{sen}c\cos a\ldots(5)\\ \operatorname{sen}a\cos\beta+\operatorname{sen}b\cos c\cos\alpha=\operatorname{sen}c\cos b\ldots(6)\end{cases}$$

5. Moltiplichiamo per $\cos b$ la (4) dell'equazione (F) e togliamola dalla (3), avremo

$$\operatorname{sen}c.\cos\alpha(1-\cos^2 b)=\operatorname{sen}b(\cos a-\cos b\cos c);$$

da cui si ha, ponendo $\operatorname{sen}^2 b$ per $1-\cos^2 b$ e dividendo per $\operatorname{sen}b$,

$$(I)\ldots\begin{cases}\cos a=\cos b\cos c+\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c\cos\alpha;\ \text{e per simmetria}\\ \cos b=\cos a\cos c+\operatorname{sen}a\operatorname{sen}c\cos\beta\\ \cos c=\cos a\cos b+\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b\cos\gamma.\end{cases}$$

Questa è la formola che serve di fondamento alle memorie di Bertrand, Eulero, De Gua, Lagrangia; e quì, diversamente dalla loro dimostrazione, l'abbiamo tratta dalla formola (F) per noi fondamentale della trigonometria sferica.

6. Sommando e sottraendo le formole (1) e (2) dell'equazione fondamentale (F), si avrà

$$\operatorname{sen}c\cos\beta+\operatorname{sen}b\cos\gamma+\cos a(\operatorname{sen}c\cos\beta+\operatorname{sen}b\cos\gamma)=\operatorname{sen}a(\cos b+\cos c)$$

$$\operatorname{sen}c\cos\beta-\operatorname{sen}b\cos\gamma-\cos a(\operatorname{sen}c\cos\beta-\operatorname{sen}b\cos\gamma)=\operatorname{sen}a(\cos b-\cos c):$$

moltiplicando membro a membro, e sciogliendo in fattori, si avrà

$$(1-\cos^2 a)(\operatorname{sen}^2 c\cos^2\beta-\operatorname{sen}^2 b\cos^2\gamma)=\operatorname{sen}^2 a(\cos^2 b-\cos^2 c);\ \text{cioè}$$

$$\operatorname{sen}^2 c\cos^2\beta-\operatorname{sen}^2 b\cos^2\gamma=\cos^2 b-\cos^2 c:$$

ponendo $1-\operatorname{sen}^2$ in vece di $\cos^2$; si avrà

$$\operatorname{sen}^4 c-\operatorname{sen}^2 c\operatorname{sen}^2\beta-\operatorname{sen}^2 b+\operatorname{sen}^2 b\operatorname{sen}^2\gamma=\operatorname{sen}^2 c-\operatorname{sen}^2 b,$$

la quale riducesi a

$$(\mathrm{II})\ldots\begin{cases}\operatorname{sen} c \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen} b \operatorname{sen}\gamma, \text{ e per simmetria}\\ \operatorname{sen} a \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen} b \operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen} c \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen} a \operatorname{sen}\gamma.\end{cases}$$

Cioè *in ogni triangolo sferico i seni degli angoli sono come i seni de' lati opposti.*

7. Si sostituisca in (1) dell'equazione (F) $\frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta}$ a $\operatorname{sen} c$ (precedente), si avrà

$$\frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen}\gamma \cos\beta}{\operatorname{sen}\beta} + \operatorname{sen} b \cos a \cos\gamma - \operatorname{sen} a \cos b = 0:$$

dividendo per $\operatorname{sen} b$ e ponendo cot in luogo di $\frac{\cos}{\operatorname{sen}}$, si avrà

$$(\mathrm{III})\ldots\begin{cases}\operatorname{sen}\gamma \cot\beta + \cos a \cos\gamma - \operatorname{sen} a \cot b = 0; \text{ e per simmetria}\\ \operatorname{sen}\gamma \cot\alpha + \cos b \cos\gamma - \operatorname{sen} b \cot a = 0\\ \operatorname{sen}\alpha \cot\gamma + \cos b \cos\alpha - \operatorname{sen} b \cot c = 0\\ \operatorname{sen}\alpha \cot\beta + \cos c \cos\alpha - \operatorname{sen} c \cot b = 0\\ \operatorname{sen}\beta \cot\alpha + \cos c \cos\beta - \operatorname{sen} c \cot\alpha = 0\\ \operatorname{sen}\beta \cot\gamma + \cos a \cos\beta - \operatorname{sen} a \cot c = 0.\end{cases}$$

8. Si moltiplichi la (3) di (F) (n.° 4) per $\cos\gamma$ e'l prodotto si sommi colla (1) di (F), contraendo si avrà

$$\operatorname{sen} c(\cos\beta + \cos\alpha \cos\gamma) + \cos^2\gamma \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} a \cos b = 0:$$

sostituendo invece di $\cos^2$, $1 - \operatorname{sen}^2$, e contraendo di nuovo, si avrà

$$\operatorname{sen} c(\cos\beta + \cos\alpha \cos\gamma) - \operatorname{sen}^2\gamma \operatorname{sen} a \cos b = 0:$$

riducendo per mezzo di $\operatorname{sen} c = \frac{\operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}\alpha}$ (II), sarà

$$\frac{\operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}\alpha}(\cos\beta + \cos\alpha \cos\gamma) - \operatorname{sen}^2\gamma \operatorname{sen} a \cos b = 0:$$

dividendo per $\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\gamma$ e riducendo, sarà

$$(\mathrm{IV})\ldots\begin{cases}\cos\beta = -\cos\alpha\cos\gamma + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma\cos b\,, \text{ e per simmetria}\\ \cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\cos a\\ \cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos c.\end{cases}$$

9. L'equazioni (I), (II), (III), (IV) contengono ciascheduna quattro elementi del triangolo sferico; cosicchè ciascheduna di esse può esser impiegata a determinare uno de' quattro elementi che contiene per mezzo de' tre altri. Epperò per determinare tutte le combinazioni possibili fra' sei elementi del triangolo sferico presi a 4 a 4, avremo, come pe' triangoli rettilinei 15 combinazioni (pag. 143), le quali riduconsi a sole quattro essenzialmente diverse, che sono le seguenti

$$(\mathrm{I})\ldots\ldots a, b, c\begin{cases}\alpha\ldots(1)\\ \beta\ldots(2)\\ \gamma\ldots(3)\end{cases}\left.\right\}\begin{array}{l}\text{Fra' tre lati e un angolo}\\ \text{Equazione (I), cioè}\\ \cos a = \cos b\cos c + \operatorname{sen} b\operatorname{sen} c\cos\alpha \text{ ec.}\end{array}$$

$$(\mathrm{II})\ldots\begin{cases}a, b, \alpha, \beta\\ a, c, \alpha, \gamma\\ b, c, \beta, \gamma\end{cases}\begin{cases}\ldots(4)\\ \ldots(5)\\ \ldots(6)\end{cases}\left.\right\}\begin{array}{l}\text{Fra due lati e due angoli opposti}\\ \text{Equazione (II), cioè}\\ \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen} b\operatorname{sen}\alpha \text{ ec.}\end{array}$$

$$(\mathrm{III})\ldots\begin{cases}a, b, \gamma\begin{cases}\alpha\ldots(7)\\ \beta\ldots(8)\end{cases}\\ a, c, \beta\begin{cases}\alpha\ldots(9)\\ \gamma\ldots(10)\end{cases}\\ b, c, \alpha\begin{cases}\beta\ldots(11)\\ \gamma\ldots(12)\end{cases}\end{cases}\left.\right\}\begin{array}{l}\text{Fra due lati e due angoli, uno}\\ \text{compreso e l'altro opposto ad uno}\\ \text{di essi}\\ \text{Equazione (III), cioè}\\ \operatorname{sen}\gamma\cot\alpha + \cos b\cos\gamma - \operatorname{sen} b\cot a = 0 \text{ ec.}\end{array}$$

$$(\mathrm{IV})\ldots\alpha, \beta, \gamma\begin{cases}a\ldots(13)\\ b\ldots(14)\\ c\ldots(15)\end{cases}\left.\right\}\begin{array}{l}\text{Fra gli angoli ed un lato}\\ \text{Equazione (IV), cioè}\\ \cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\cos a.\end{array}$$

10. Abbiamo veduto come dalla formola cardinale (F) de' triangoli sferici sono facilmente uscite le quattro equazioni quassù

riportate e bastanti a risolvere tutte le combinazioni a quattro a quattro de' sei elementi dell'angolo sferico. Ma per avere qualche guida nelle ricerche de' casi particolari che risguardano il problema trigonometrico sferico, fa uopo conoscere talune proprietà de' triangoli sferici, che noi parimente cercheremo dedurre dalla stessa formola fondamentale (F). E sulle prime consideriamo un angolo in una delle equazioni (F'), p. e. l'angolo α; la (3) e la (4) ci daranno

$$\cos\alpha = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\operatorname{sen} b \cos a - \cos\gamma \operatorname{sen} a \cos b}{\operatorname{sen} c} \\ \dfrac{\operatorname{sen} c \cos a - \cos\beta \operatorname{sen} a \cos c}{\operatorname{sen} b} \end{array} \right\} \ldots (F')$$

Ne' secondi membri di queste equazioni facciamo variare solamente a. A proporzione che a cresce diminuiscono $\operatorname{sen} b \cos a$, $\operatorname{sen} c \cos a$, e crescono $\cos\gamma \operatorname{sen} a \cos b$, $\cos\beta \operatorname{sen} a \cos c$; e l'opposto ha luogo quando a diminuisce; epperò i secondi membri di quest'equazioni diminuiscono o crescono come cresce o diminuisce a; adunque anche $\cos\alpha$ diminuisce o cresce come cresce o diminuisce a. Sicchè *un angolo α di un triangolo sferico cresce* o *diminuisce come si fa maggiore o minore il lato opposto a.*

11. Facciamo nelle due formole (F') del n.° precedente $\cos a = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 a}$; ordinando per $\operatorname{sen}^2 a$, dopo di aver fatto sparire il radicale, si avrà

$$\operatorname{sen}^2 a + \frac{2 \operatorname{sen} c \cos b \cos\gamma \cos\alpha}{\operatorname{sen}^2 b + \cos^2 b \cos^2\gamma} \operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen}^2 b - \operatorname{sen}^2 c . \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2 b + \cos^2 b \cos^2\gamma}$$

$$\operatorname{sen}^2 a + \frac{2 \operatorname{sen} b \cos c \cos\beta \cos\alpha}{\operatorname{sen}^2 c + \cos^2 c \cos^2\beta} \operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen}^2 c - \operatorname{sen}^2 b . \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2 c + \cos^2 c . \cos^2\beta},$$

le quali, daranno

$$\operatorname{sen} a = -\frac{\operatorname{sen} c \cos b \cos\gamma \cos\alpha}{\operatorname{sen}^2 b + \cos^2 b \cos^2\gamma}$$

$$\pm \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen}^2 b + \cos^2 b \cos^2\gamma} \sqrt{\operatorname{sen}^2 b + \cos^2 b \cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2 c . \cos^2\alpha}$$

$$\operatorname{sen} a = -\frac{\operatorname{sen} b \cos c . \cos\beta \cos\alpha}{\operatorname{sen}^2 c + \cos^2 c \cos^2\beta}$$

$$\pm \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen}^2 c + \cos^2 c . \cos^2\beta} \sqrt{\operatorname{sen}^2 c + \cos^2 c . \cos^2\beta - \operatorname{sen}^2 b \cos^2\alpha}.$$

Se vogliamo considerare ciocchè avviene in queste formole quando facciamo variare solamente α, scriviamole così

$$\operatorname{sen} a = \begin{cases} -P\cos\alpha \pm M\sqrt{B - C\cos^2\alpha} \\ -Q\cos\alpha \pm N\sqrt{D - E\cos^2\alpha} \end{cases}$$

e queste mostrano intuitivamente che il secondo membro dell'equazione cresce o diminuisce come diminuisce o cresce $\cos\alpha$, ossia come cresce o diminuisce α. Adunque *i lati de' triangoli sferici crescono o diminuiscono come crescono o diminuiscono gli angoli opposti*; ch'è l'inversa della precedente.

(*) I due precedenti teoremi (10) e (11) si deducono anche intuitivamente dall'equazioni (I) e (IV). Infatti l'equazione

$\cos A = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$ ci dice che il primo membro si fa maggiore o minore a proporzione che $\cos a$ cresce o diminuisce; adunque $\cos A$ cresce o diminuisce con $\cos a$; epperò diminuendo a sotto gli stessi lati b, c, diminuisce A, e questo cresce come cresce A. E lo stesso ci dice l'equazione

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma \cos a.$$

Similmente l'equazioni $\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos\alpha$,

$\cos a = \dfrac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma}$ ci dicono che variando α solamente, $\cos a$ diminuirà o crescerà come diminuisce o cresce $\cos\alpha$; ossia che un lato cresce coll'angolo opposto.

12. Supponiamo $b = c = 90^\circ$, la (3) e la (5) dell'equazione cardinale (F) daranno $\cos\alpha = \cos a$, epperò $\alpha = a$; e la (4) e la (6) della medesima formola fondamentale daranno $\cos\gamma = 0$, $\cos\beta = 0$; cioè $\beta = \gamma = 90$. Cioè *se due lati di un triangolo sferico sono*

quadranti, l'angolo da essi compreso sarà misurato dal terzo lato, e gli angoli opposti a' lati quadranti sono retti.

13. Sia $\beta=\gamma=90^\circ$, le formole (4) e (6) dell'equazione cardinale daranno

$$(m)\ldots \cos\alpha=\frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} c}=\frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} b};\ \text{epperò}\ b=c.$$

Ciò posto l'equazioni (m) daranno $\operatorname{sen}^2 b\cos^2 c-\operatorname{sen}^2 c\cos^2 b=0$; cioè $\operatorname{sen}(b+c)\operatorname{sen}(b-c)=0$, ed essendo $\operatorname{sen}(b-c)=0$, per esser $b=c$, sarà $\operatorname{sen}(b+c)=0$; quindi o $b+c=0$, o $b+c=180$: la prima ipotesi è inammisibile; sicchè sarà $b+c=180$, cioè $b=90=c$. In tal caso la (3) e la (5) dell'equazione cardinale daranno $\cos\alpha=\cos a$, cioè $\alpha=a$. *Sarà dunque vera l'inversa del teorema precedente.*

14. Se fosse $b=c=a=90^\circ$, le prime tre formole dell'equazione cardinale (F) darebbero

$$\cos\beta=0,\ \cos\gamma=0,\ \cos\alpha=0,\ \text{cioè}\ \beta=\gamma=\alpha=90^\circ.$$

E se all'opposto è $\alpha=\beta=\gamma=90$, le stesse prime tre formole darebbero $\operatorname{sen} a\cos b=0$, $\operatorname{sen} a\cos c=0$, $\operatorname{sen} b\cos a=0$: e non potendo essere $\operatorname{sen} a=0$, $\operatorname{sen} b=0$, perchè non vi sarebbe più triangolo, sarà $\cos b=0$, $\cos c=0$, $\cos a=0$, cioè $a=b=c=90^\circ$. Adunque *il triangolo sferico i cui lati sono quadranti sarà trirettangolo, o ottava parte della superficie sferica; e il triangolo trirettangolo avrà i tre lati quadranti.*

Quel punto della superficie sferica che dista da qualunque punto di una circonferenza per un quadrante dicesi *polo* di questo cerchio.

15. (Fig. 47). Indicheremo gli angoli de' triangoli sferici colle lettere greche α, β, γ e i lati opposti colle lettere analoghe comuni a, b, c. Siano dunque i vertici α, β, γ di un triangolo sferico i poli rispettivi de' lati a', b', c' di un altro $\alpha'\beta'\gamma'$, i cui angoli sono α', β', γ', sarà (precedente) $B=C=B'=A=A'=C'=90^\circ$: questi angoli presi a due a due danno $A=C=90$, epperò $a'=c'=90^\circ$, onde sarà β' polo di b; $B'=C'=90=A'=B$; cioè $b'=c'=90^\circ$; $a'=b'=90^\circ$; e quindi sarà α' polo di a, e γ' polo di c; epperò i triangoli $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, ne' quali i vertici di uno

sono i rispettivi poli de' lati opposti dell'altro, si chiamano *polari*. In questi triangoli si osservano le seguenti proprietà: si ha

$$\beta' C + \gamma' B = \beta'\gamma' + BC = \beta'\gamma' + \alpha = a' + \alpha = 180 \ldots \text{ e parimenti}$$

$$B'\gamma + \beta C' = B'C' + a = \alpha' + a = 180 \text{ ec.}$$

Cioè *ne' triangoli polari gli angoli di uno di essi sono supplementi de' lati opposti dell' altro, e reciprocamente.*

16. Supponiamo che un lato a di triangolo sferico potesse essere 180°: in tal caso l'equazione (3) della formola cardinale (F) (4) darà $\cos\alpha = -\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} c}$, e la (5) darà $\cos\alpha = -\frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} b}$. Queste due equazioni danno $b = c$; epperò, sostituendo nel valore di $\cos\alpha$, sarà $\cos\alpha = -1$, cioè $\alpha = 180$. In tal caso i piani degli archi b, c i quali comprendono l'angolo α si confonderanno in un solo, e non vi sarà più triangolo. Adunque i lati de' triangoli sferici hanno per limite superiore 180°. Di più se fosse $a = 0$, neppure vi sarebbe più triangolo sferico: sicchè il limite inferiore de' lati de' triangoli sferici è 0. Adunque *un lato di triangolo sferico è minore di* 180° *ed è maggiore di* 0.

Poichè noi possiamo misurare gli angoli de' triangoli sferici per mezzo de' lati di esso (12), ne segue che parimente i limiti degli angoli de' triangoli sferici sono 0, e 180°.

17. Essendo $\alpha > 0$ e $\alpha < 180$, sarà $\cos\alpha < \pm 1$: facciasi perciò $\cos\alpha = \pm\frac{m}{n}$ (frazione genuina), la (I) n.° 5 diverrà

$$\cos a = \cos b \cos c \pm \frac{m}{n} \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c: \text{ or abbiamo}$$

$$\cos(b + c) = \cos b \cos c - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c, \text{ ed è}$$

$$\cos b \cos c - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c < \cos b \cos c \pm \frac{m}{n} \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c; \text{ adunque sarà}$$

$$\cos a > \cos(b + c)); \text{ cioè } b + c > a.$$

Adunque *due lati del triangolo sferico sono maggiori del rimanente.*

18. Intendasi unito il centro della sfera co' tre vertici di un triangolo sferico, chiamando A^1, B^1, C^1 i tre angoli piani che formano al centro della sfera l'angolo solido, sarà $A^1=a$, $B^1=b$, $C^1=c$ (3); ma è $b+c>a$; adunque sarà $B^1+C^1>A^1$. Cioè *de' tre angoli piani che formano un angolo solido triedro, due sono maggiori del rimanente.*

19. Abbiamo dimostrato (prec.) essere $\cos a>\cos(b+c)$; quindi sarà $\cos a>\cos[360^\circ-(b+c)]$ (formole (K) pag. 66); epperò $a<360^\circ-(b+c)$; cioè $a+b+c<360^\circ$. Sicchè *la somma de' tre lati di un triangolo sferico è minore della circonferenza del cerchio.*

(Fig. 48). Or se in un poligono sferico si prolunghi un lato AE verso M e N, CB finchè incontra in M l'arco EA prolungato, e CD finchè incontri lo stesso arco prolungato in N, sarà $AB+BC+CD+DE+EA\ldots<(MN+MC+CN)$; epperò tanto più minore di 360° Sicchè *il perimetro di un poligono sferico è minore della circonferenza del cerchio.*

20. Quindi, se A^1, B^1, C^1 ec., indicano gli angoli piani che formano l'angolo solido di una piramide poligona posto col suo vertice al centro di una sfera, sarà $A^1=a$, $B^1=b$, $C^1=c$, $D=d$, $E^1=e\ldots$ ma è $a+b+c+d+e=<360$, sicchè sarà pure $A^1+B^1+C^1+D^1+E^1\ldots<360^\circ$. Cioè *la somma di tutti gli angoli piani che formano un angolo solido è minore di quattro angoli retti.*

Adunque con angoli la cui somma è eguale o supera 360° non può formarsi un angolo solido.

21. Segue da ciò, ch'essendo l'angolo di un triangolo equilatero due terzi del retto, gli angoli del triangolo equilatero potranno unirsi a formare un angolo solido, ma a tre a tre, o a quattro a quattro, o a cinque a cinque. Il *tetraedro regolare* terminato da quattro triangoli equilateri ha i suoi quattro angoli solidi formati ciascheduno da tre angoli di triangolo equilatero: l'*ottaedro regolare* terminato da otto triangoli equilateri ha i suoi otto angoli solidi formati ciascheduno da quattro angoli di triangolo equilatero: l'*icosaedro regolare* terminato da venti triangoli equilateri ha i suoi venti angoli solidi formati ciascuno da cinque an-

goli di triangolo equilatero. Gli angoli del quadrato ossia gli angoli retti non possono unirsi che a tre a tre a formare un angolo solido, come nell' *esaedro regolare* o *cubo* le cui sei facce sono quadrati e i sei angoli solidi sono formati ciascuno da tre angoli retti. Gli angoli del pentagono regolare non possono unirsi che a tre a tre per formare un angolo solido (essendo ciascheduno di essi $\frac{6}{5}$ di un retto), come nel *dodecaedro regolare* terminato da dodici pentagoni regolari, ed ognuno de' dodici angoli solidi è formato da tre angoli di pentagono regolare.

Epperò cinque soli poliedri regolari possono aversi, tre terminati da triangoli equilateri, il *tetraedro*, l'*ottaedro* e l'*icosaedro regolare*: uno terminato da sei quadrati, il *cubo*; e uno terminato da 12 pentagoni regolari, il *dodecaedro regolare*.

(*) 22. I teoremi che riguardano i limiti de' lati del triangolo sferico possono dedursi da un'analisi dipendente pure dalla nostra formola cardinale (F), ma meno semplice. Pure noi qui n'esponiamo un saggio, e perchè nuova e perchè pare ch'essa sia un passo di più nel sentiero impervio delle inequazioni, sopratutto quando si hanno a determinare i limiti fra' quali sono comprese certe quantità. A tal oggetto, supponendo solamente noto il teorema del n.° 16, cioè $a < 180$ e > 0, sostituiscasi nell'equazione (1) della formola cardinale (F) $1 - 2\text{sen}^2 \frac{\beta}{2}$ a $\cos\beta$, e $1 - 2\text{sen}^2 \frac{\gamma}{2}$ a $\cos\gamma$ (IV pag. 69), si avrà, riducendo mercè la (2) formola (Q) pag. 68,

$$\text{sen}\frac{c+b-a}{2}\cos\frac{c+a-b}{2} = \text{sen}\,c\,\text{sen}^2\frac{\beta}{2}\,\text{sen}\,b\cos a\,\text{sen}^2\frac{\gamma}{2}\ldots (M)$$

Il secondo membro di questa equazione per effetto di $\cos a$ può divenire negativo (16, e pag. 20) o positivo; epperò potrà verificarsi $\text{sen}\frac{c+b-a}{2}\cos\frac{c+a-b}{2} \lessgtr 0$. Questo prodotto sarà negativo sotto le seguenti condizioni (pag. 20 n.i (23) e (24)).

$$1^a\ldots\begin{cases}\dfrac{c+b-a}{2}>180 \text{ epperò } \operatorname{sen}\dfrac{c+b-a}{2}<0\ldots\\[2ex] \dfrac{c+a-b}{2}>270 \text{ epperò } \cos\dfrac{c+a-b}{2}>0\end{cases}$$

$$2^a\ldots\begin{cases}\dfrac{c+b-a}{2}<180 \text{ epperò } \operatorname{sen}\dfrac{c+b-a}{2}>0\ldots\\[2ex] \dfrac{c+a-b}{2}>90 \text{ epperò } \cos\dfrac{c+a-b}{2}<0\end{cases}$$

$$3^a\ldots\begin{cases}\dfrac{c+b-a}{2}>180 \text{ epperò } \operatorname{sen}\dfrac{c+b-a}{2}<0\ldots\\[2ex] \dfrac{c+a-b}{2}<90 \text{ epperò } \cos\dfrac{c+a-b}{2}>0\end{cases}$$

$$4^a\ldots\begin{cases}\dfrac{c+b-a}{2}<180 \text{ epperò } \operatorname{sen}\dfrac{c+b-a}{2}>0\ldots\\[2ex] \dfrac{c+a-b}{2}>180 \text{ epperò } \cos\dfrac{c+a-b}{2}<0\end{cases}$$

E sarà positivo sotto le seguenti condizioni

$$5^a\ldots\begin{cases}\dfrac{c+b-a}{2}<180 \text{ epperò } \operatorname{sen}\dfrac{c+b-a}{2}>0\ldots\\[2ex] \dfrac{c+a-b}{2}<90 \text{ epperò } \cos\dfrac{c+a-b}{2}>0\end{cases}$$

$$6^a\ldots\begin{cases}\dfrac{c+b-a}{2}<180 \text{ epperò } \operatorname{sen}\dfrac{c+b-a}{2}>0\ldots\\[2ex] \dfrac{c+a-b}{2}>270 \text{ epperò } \cos\dfrac{c+a-b}{2}>0\end{cases}$$

$$7^a\ldots\begin{cases}\dfrac{c+b-a}{2}>180 \text{ epperò } \operatorname{sen}\dfrac{c+b-a}{2}<0\ldots\\[2ex] \dfrac{c+a-b}{2}>90 \text{ epperò } \cos\dfrac{c+a-b}{2}<0\end{cases}$$

$$8^a \ldots \begin{cases} \frac{c+b-a}{2} > 180 \text{ epperò sen } \frac{c+b-a}{2} < 0 \ldots \\ \frac{c+a-b}{2} > 180 \text{ epperò cos } \frac{c+a-b}{2} < 0 \end{cases}$$

Per esaminare queste inequazioni fa uopo osservare che, generalmente parlando, se m, n, p sono i lati di un triangolo sferico, bisogna escludere le ipotesi nelle quali entra la condizione $\frac{m+n-p}{2} > 180$, e tanto più $\frac{m+n-p}{2} > 270$; poichè essendo $m < 180^o$, $n < 180^o$ (16), sarà $m+n < 360^o$ epperò $\frac{m+n}{2} < 180$ e tanto più $\frac{m+n-p}{2} < 180$. Adunque vanno escluse dalla nostra analisi, la 1ª, la 3ª, la 4ª, la 6ª, la 7ª, la 8ª: e le due sole condizioni ammissibili sono la 2ª e la 5.ª Ma volendo trarre tutto dalla nostra analisi, dimostreremo, per mezzo della medesima, assurda la condizione in cui $\frac{m+n-p}{2} > 180$ entra in combinazione con qualsiasi altra ipotesi. Il caso più favorevole è quello che dipende dalla 3ª combinazione, poichè se noi dimostreremo che $\frac{c+b-a}{2} > 180$ non può coesistere neppure con $\frac{c+a-b}{2} < 90$, maggiormente non lo potrà con una quantità maggiore di 90°. Per soddisfare dunque alle condizioni $\frac{c+b-a}{2} > 180^o$, $\frac{c+a-b}{2} < 90$, facciasi $\frac{c+b-a}{2} = 180^o + g$, $\frac{c+a-b}{2} = 90 - g' \ldots (h)$: ciò posto dovendo essere sen $\frac{c+b-a}{2} < 0$ per la ipotesi 3ª, i limiti di g saranno 0, 180°: al contrario dovendo essere cos $\frac{c+a-b}{2} > 0$, i limiti di g' saranno 0, 90°.

Facciasi perciò $g=180-\frac{180}{n}$ (n è frazione spuria o intero); $g'=90^\circ-\frac{90}{m}$ (m è frazione spuria o intero); le due equazioni (h) diverranno

$$\frac{c+b-a}{2}=360^\circ-\frac{180^\circ}{n}=180^\circ+\varphi,\quad \frac{c+a-b}{2}=\frac{90^\circ}{m}:$$

sommando queste due equazioni si avrà $c=180+\varphi+\frac{90^\circ}{n}$; lo che è assurdo. Tanto più dunque sono assurde la 1ª, la 4ª, la 6ª, la 7ª, la 8ª ipotesi.

Esaminiamo ora le ipotesi 2ª e 5ª. Per soddisfare alle condizioni della 2ª, $\frac{c+b-a}{2}<180^\circ$, $\frac{c+a-b}{2}>90$; facciasi $\frac{c+b-a}{2}=180^\circ-g$, $\frac{c+a-b}{2}=90^\circ+g'$: e poichè si dee soddisfare alla condizione di $\operatorname{sen}\frac{c+b-a}{2}>0$, i limiti di g saranno 0, 180°; epperò, fatto $g=\frac{180}{n}$, sarà $\frac{c+b-a}{2}=180^\circ-\frac{180^\circ}{n}$...($k$) (n frazione spuria): parimente dovendo essere $\cos\frac{c+a-b}{2}<0$, i limiti di g' saranno pure 0 e 180°; epperò facciamo $g'=\frac{180}{m}$ (m frazione spuria), sarà $\frac{c+a-b}{2}=90+\frac{180}{m}$. . . ($r$): sommando ($k$) e ($r$) si avrà $c=270^\circ-\left(\frac{180^\circ}{n}-\frac{180^\circ}{m}\right)$.... (5). In questa equazione possono verificarsi due condizioni,

1ª $\frac{180^\circ}{n}-\frac{180^\circ}{m}=90^\circ-\varphi$; opure 2ª $\frac{180}{n}-\frac{180}{m}=90+\varphi$.

La prima condizione riduce l'equazione (5) a $c=270^\circ+\varphi-90^\circ$, cioè $c>180$, assurdo: la seconda poi dà $c=270-(90+\varphi)$, cioe $c<180$, lo che è reale.

Passiamo ora all'analisi della 5ª ipotesi, cioè di $\frac{c+b-a}{2}<180$ $\frac{c+a-b}{2}<90^\circ$. Questa ipotesi è più favorevole della precedente, poichè quì abbiamo $\frac{c+a-b}{2}<90$, mentre nell'altra era $\frac{c+a-b}{2}>90^\circ$: per conseguenza questa ipotesi è ammissibile: ma per giungere direttamente alla stessa conseguenza facciasi $\frac{c+b-a}{2}=180-g$, $\frac{c+a-b}{2}=90-g'\ldots(x)$; e si vede che, dovendo essere $\operatorname{sen}\frac{c+b-a}{2}>0$, $\cos\frac{c+a-b}{2}>0$, il limite di g sarà 0 e 180°, e quello di g' sarà 0 e 90°. Sommando le due equazioni (x) sarà $c=270^\circ-(g+g')$, equazione reale quando è $g+g'>90^\circ$.

Avremo adunque

$$\left.\begin{array}{l}\frac{c+b-a}{2}>180^\circ,\ \frac{c+a-b}{2}<90\\ \frac{c+b-a}{2}>180^\circ,\ \frac{c+a-b}{2}>90^\circ\end{array}\right\}\text{condizioni assurde.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{c+b-a}{2}<180^\circ,\ \frac{c+a-b}{2}>90^\circ\\ \frac{c+b-a}{2}<180^\circ,\ \frac{c+a-b}{2}<90^\circ\end{array}\right\}\text{condizioni ammisibili.}$$

Le due prime inequazioni convengono nella condizione $\frac{c+b-a}{2}>180$, e le due seconde convengono nell'altra $\frac{c+b-a}{2}<180$; e le due prime sono in disaccordo colle due se-

conde perchè in quelle è $\frac{c+b-a}{2}>180$ e in queste $\frac{c+b-a}{2}<180$: ma le due prime sono assurde e le due altre ammisibili; adunque è assurda la condizione $\frac{c+b-a}{2}>180$, come abbiamo quassù veduto, e reale l'altra $\frac{c+b-a}{2}<180$; cioè è assurda la condizione $\text{sen}\frac{c+b-a}{2}<0$, e reale l'altra $\text{sen}\frac{c+b-a}{2}>0$: la prima dà $c+b<a$, la seconda $c+b>a$: epperò *la somma di due lati del triangolo sferico è maggiore del rimanente lato;* come abbiamo dimostrato (n.° 17) con facilissimo ragionamento.

23. La formola (IV) § 8 dedotta dalla nostra equazione fondamentale dà

$$\cos a=\frac{\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma}{\text{sen}\beta\,\text{sen}\gamma};\ \text{epperò sarà}$$

$$1-\cos a=2\text{sen}^2\frac{a}{2}=-\frac{\cos\alpha+\cos(\beta+\gamma)}{\text{sen}\beta\,\text{sen}\gamma};$$

da cui si ha (*Q* pag. 68)

$$(h)\ldots\ \text{sen}^2\frac{a}{2}=\frac{-\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}}{\text{sen}\beta\,\text{sen}\gamma}.$$

E come il primo membro di questa equazione è positivo, così positivo sarà anche il secondo; lo che esige le condizioni

$$1^a\ldots\ \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\begin{matrix}>1\text{ quadrante}\\<3\text{ quadranti}\end{matrix};\quad 2^a\ldots\ \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}<1\text{ quadrante}.$$

La prima condizione dà

$$\alpha+\beta+\gamma\begin{cases}>2\text{ quadranti}\\<6\text{ quadranti}\end{cases};\ \text{e la seconda}\ \beta+\gamma-\alpha<180.$$

Adunque *il limite inferiore della somma de' tre angoli di un*

triangolo sferico è due retti, e'l superiore è sei retti: e due angoli di un triangolo sferico diminuiti del terzo angolo danno un risultamento minore di 180°.

Epperò, non essendo costante la somma de' tre angoli de' triangoli sferici, non è dato il terzo angolo quando se ne conoscono due. La formola (h) è utile a determinare coll'ajuto de' logaritmi un lato per mezzo de' tre angoli.

24. La stessa formola $\cos a = \frac{\cos\alpha + \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma}$ dà

$$\frac{1+\cos a}{2} = 2\cos^2\frac{a}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\,.\,\cos\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}}{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma};$$

la quale equazione, essendo positivo il primo membro, darà $\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} < 90°$, $\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} < 90$, per serbare il segno positivo anche al secondo membro; e queste inequazioni si riferiscono al teorema espresso dell' altra quassù ottenuta

$$\beta+\gamma-\alpha < 180°.$$

La inequazione $\alpha+\beta-\gamma < 180$ applicata al triangolo polare dà il noto teorema (13) $a+b > c$.

(*) 25. L'equazione (I) (n.° 5) dà

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c};$$ la quale dara

$$(k)\ldots\left\{\begin{array}{l} \frac{1-\cos\alpha}{2} = \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos(b-c)-\cos a}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \\ \qquad = \frac{\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2}}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \\ \frac{1+\cos\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \\ \qquad = \frac{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}. \end{array}\right\} (Q \text{ pag. } 68)$$

Il secondo membro di questa seconda equazione non può altrimenti esser positivo, come il primo, che dietro l'ipotesi di

$\frac{a+b+c}{2} < 180$, di cui è una conseguenza l'altra inequazione

$\frac{b+c-a}{2} < 180$. La prima di queste due inequazioni si riferisce al noto teorema (19) $a+b+c <$ circonferenza del cerchio.

26. Facciasi $a=b$ nelle due formole dell'equazione cardinale (F), cioè in

$$\text{sen}\, c \cos\alpha + \text{sen}\, a \cos b \cos\gamma = \text{sen}\, b \cos a$$
$$\text{sen}\, c \cos\beta + \text{sen}\, b \cos a \cos\gamma = \text{sen}\, a \cos b$$

si avrà colla sottrazione $\text{sen}\, c(\cos\alpha - \cos\beta) = 0$; epperò $\cos\alpha = \cos\beta$ e $\alpha = \beta$. Cioè *gli angoli opposti a' lati eguali de' triangoli sferici sono eguali: epperò i triangoli sferici equilateri fra loro sono equiangoli.*

27. Facciamo nelle stesse equazioni $\alpha = \beta$; sottraendo si avrà $\text{sen}\,(a-b)(\cos\gamma + 1) = 0$ equazione che dà $a - b = 0$ cioè $a = b$.

Epperò *i lati opposti agli angoli eguali de' triangoli sferici sono eguali, cioè i triangoli sferici equiangoli sono pure equilateri fra loro.*

28. Sia $a > b$; eliminiamo $\cos\gamma$ per mezzo delle stesse formole (1) e (3) dell'equazione cardinale, cioè

$$\text{sen}\, c \cos\alpha + \text{sen}\, a \cos b \cos\gamma = \text{sen}\, b \cos a$$
$$\text{sen}\, c \cos\beta + \text{sen}\, b \cos a \cos\gamma = \text{sen}\, a \cos b;$$ si avrà

$$\text{sen}\, a \cos b(\text{sen}\, a \cos b - \text{sen}\, c \cos\beta) = \text{sen}\, b \cos a(\text{sen}\, b \cos a - \text{sen}\, c \cos\alpha);$$

or per l'ipotesi da $a > b$ è $\text{sen}\, a > \text{sen}\, b$ e $\cos b > \cos a$; epperò sarà $\text{sen}\, a \cos b > \text{sen}\, b \cos a$; laonde la precedente equazione ci darà $\text{sen}\, a \cos b - \text{sen}\, c \cos\beta < \text{sen}\, b \cos a - \text{sen}\, c \cos\alpha$; e tanto maggiormente sarà $-\text{sen}\, c \cos\beta < -\text{sen}\, c \cos\alpha$; cioè $\cos\alpha < \cos\beta$ e perciò $\alpha > \beta$. Cioè *ne' triangoli sferici al maggior lato è opposto il maggior angolo.*

29. Sia all'opposto $\alpha > \beta$, eliminando sen$c$ per mezzo delle stesse equazioni, si avrà

$$\frac{\operatorname{sen} b \cos a - \operatorname{sen} a \cos b \cos \gamma}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a \cos \gamma}{\cos \beta},$$

ma è $\cos \alpha < \cos \beta$ per ipotesi, adunque sarà

$$\operatorname{sen} b \cos a - \operatorname{sen} a \cos b \cos \gamma < \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a \cos \gamma \ldots \quad (M)$$

questa inequazione non può altrimenti verificarsi che supponendo $a > b$; infatti in questa ipotesi è

$$\operatorname{sen} b \cos a < \operatorname{sen} a \cos b; \quad \operatorname{sen} a \cos b \cos \gamma > \operatorname{sen} b \cos a \cos \gamma;$$

prendendo la differenza membro a membro di queste due inequazioni sarà tanto maggiormente

$$\operatorname{sen} b \cos a - \operatorname{sen} a \cos b \cos \gamma < \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a \cos \gamma:$$

Adunque la inequazione (M) è la conseguenza di $a > b$. Epperò *in un triangolo sferico il lato opposto all'angolo maggiore è maggiore del lato opposto all'angolo minore.*

30. Le formole (1) e (3) dell'equazione cardinale (F) cioè

$$\operatorname{sen} c . \cos \beta + \operatorname{sen} b \cos a \cos \gamma = \operatorname{sen} a \cos b$$
$$\operatorname{sen} c . \cos \alpha + \operatorname{sen} a \cos b \cos \gamma = \operatorname{sen} b \cos a$$

danno mercè la somma e la sottrazione

$$\operatorname{sen}(a+b)(1-\cos\gamma) = \operatorname{sen} c(\cos\alpha + \cos\beta)$$
$$\operatorname{sen}(a-b)(1+\cos\gamma) = \operatorname{sen} c(\cos\beta - \cos\alpha),$$

le quali mercè le formole trigonometriche (pag. 68 e 69) danno

$$\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+b}{2}(1-\cos\gamma) = \operatorname{sen} c . \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}\cos\frac{a-b}{2}(1+\cos\gamma) = \operatorname{sen} c . \operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Dividendo e riducendo si avrà

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cot\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}}\cot^2\frac{\gamma}{2}\ldots\ (K)$$

L'espressione $\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}}\cot^2\frac{\gamma}{2}$, pe' limiti entro i quali è racchiuso il valore degli angoli, è essenzialmente positiva: l'altra espressione $\frac{\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tang}\frac{(\alpha-\beta)}{2}}$ anche è positiva poichè se $a \gtrless b$, sarà pure $\alpha \gtrless b$ (prec.): adunque il secondo membro dell'equazione (K) è positivo; e tale sarà pure il primo membro: lo che esige che $a+b$, $\alpha+\beta$ siano della stessa specie. Epperò *la somma di due lati del triangolo sferico è della stessa specie della somma degli angoli opposti.*

31. I teoremi che seguono considerano due triangoli sferici sulla stessa sfera, o sopra sfere eguali.

Sia in due triangoli sferici $a=a'$, $b=b'$, $\gamma=\gamma'$; la (3) e (1) formola dell'equazione cardinale applicata a questi triangoli sotto l'adottata condizione darà

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}c\,.\cos\alpha=\cos a\operatorname{sen}b-\operatorname{sen}a\cos b\cos\gamma\\ \operatorname{sen}c'\cos\alpha'=\cos a\operatorname{sen}b-\operatorname{sen}a\cos b\cos\gamma\end{array}\right\}\ldots\ (H)$$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}c\,.\cos\beta=\cos b\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}b\cos a\cos\gamma\\ \operatorname{sen}c'\cos\beta'=\cos b\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}b\cos a\cos\gamma\end{array}\right\}\ldots\ (H')$$

Paragonando i secondi membri dell'equazione (H), e quelli dell'equazione (H') separatamente, se ne deduce

$$\operatorname{sen}c\,.\cos\alpha=\operatorname{sen}c'\cos\alpha';\ \operatorname{sen}c\,.\cos\beta=\operatorname{sen}c'\cos\beta'$$

Queste equazioni possono verificarsi in due modi, cioè

1° $c=c'$, $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$;
2° $\operatorname{sen} c : \operatorname{sen} c' = \cos\alpha' : \cos\alpha = \cos\beta' : \cos\beta$.

In questa seconda ipotesi se è $c>c'$ sarà $\alpha>\alpha'$, $\beta>\beta'$, epperò

$\alpha+\beta>\alpha'+\beta'$; e se è $c<c'$ sarà $\alpha+\beta<\alpha'+\beta'$.

Queste due inequazioni potrebbero verificare il caso di $\alpha+\beta$, $\alpha'+\beta'$ di specie differente; ed allora anche $a+b$ sarebbe di specie differente di $a'+b'$, ciocchè ripugna alla nostra ipotesi di $a=a'$, $b=b'$ (30). Adunque la supposizione di $a=a'$, $b=b'$, $\gamma=\gamma'$ mena alla conseguenza di $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $c=c'$. Cioè *se due triangoli sferici hanno due lati eguali rispettivamente e l'angolo contenuto da essi eguale, avranno gli altri elementi eguali, essendo sempre eguali gli angoli opposti a' lati eguali e reciprocamente.*

32. Sia ora $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$ le formole (3), (4), (5) e (6) dell'equazione cardinale (F) applicate a questi triangoli diverranno

$$\begin{cases} \cos a \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} c . \cos\alpha + \operatorname{sen} a \cos b \cos\gamma \\ \cos a \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} c . \cos\alpha' + \operatorname{sen} a \cos b \cos\gamma' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos c \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \cos\gamma + \operatorname{sen} c \cos b \cos\alpha \\ \cos a \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \cos\gamma' + \operatorname{sen} c . \cos b \cos\alpha'. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos a \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} b \cos\alpha + \operatorname{sen} a \cos c . \cos\beta \\ \cos a \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} b \cos\alpha' + \operatorname{sen} a \cos c . \cos\beta' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos b \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \cos\beta + \operatorname{sen} b \cos c . \cos\alpha \\ \cos b \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \cos\beta' + \operatorname{sen} b \cos c \cos\alpha' \end{cases}$$

Sottraendo l'una dall'altra ciascuna coppia corrispondente, sarà

$$(M)\ldots \begin{cases} \operatorname{sen} c(\cos\alpha - \cos\alpha') + \operatorname{sen} a \cos b(\cos\gamma - \cos\gamma') = 0 \\ \operatorname{sen} a(\cos\gamma - \cos\gamma') + \operatorname{sen} c \cos b(\cos\alpha - \cos\alpha') = 0 \\ \operatorname{sen} b(\cos\alpha - \cos\alpha') + \operatorname{sen} a \cos c(\cos\beta - \cos\beta') = 0 \\ \operatorname{sen} a(\cos\beta - \cos\beta') + \operatorname{sen} b \cos c(\cos\alpha - \cos\alpha') = 0. \end{cases}$$

Quest'equazioni possono verificarsi in due modi;

$$1^{\circ}\ldots\ \alpha=\alpha',\ \beta=\beta',\ \gamma=\gamma'$$

$$2^{\circ}\ldots\begin{cases}\dfrac{\cos\alpha-\cos\alpha'}{\cos\gamma-\cos\gamma'}+\dfrac{\operatorname{sen}a\cos b}{\operatorname{sen}c}=0\ldots\ (1)\\[2ex]\dfrac{\cos\beta-\cos\beta'}{\cos\alpha-\cos\alpha}+\dfrac{\operatorname{sen}b\cos c}{\operatorname{sen}a}=0\ldots\ (2)\\[2ex]\dfrac{\cos\alpha-\cos\alpha}{\cos\beta-\cos\beta'}+\dfrac{\operatorname{sen}a\cos c}{\operatorname{sen}b}=0\ldots\ (3)\\[2ex]\dfrac{\cos\gamma-\cos\gamma'}{\cos\alpha-\cos\alpha'}+\dfrac{\operatorname{sen}c.\cos b}{\operatorname{sen}a}=0\ldots\ (4):\end{cases}$$

di queste ultime condizioni la 1ª e la 4ª e la 2ª e la 3ª danno rispettivamente

$$\frac{\operatorname{sen}a\cos b}{\operatorname{sen}c}=\frac{\operatorname{sen}a}{\operatorname{sen}c.\cos b};\ \frac{\operatorname{sen}b\cos c}{\operatorname{sen}a}=\frac{\operatorname{sen}b}{\operatorname{sen}a\cos c}.$$

Esaminiamone una sola, giacchè le conseguenze sono le stesse per l'altra che è formata nello stesso modo.

Si ha dalla prima di esse

$$\operatorname{sen}a\operatorname{sen}c\cos^2 b=\operatorname{sen}a\operatorname{sen}c,$$

la quale non può avere altrimenti luogo che coll'ipotesi di $\cos^2 b=1$; lo che suppone o $b=0$, o $b=360$: ma amendue queste conseguenze sono assurde; la prima perchè non vi sarebbe più triangolo; la seconda perchè il limite superiore de'lati è 180°: adunque l'equazioni (M) non possono avere altrimenti luogo che colla condizione di $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$. Sicchè *due triangoli sferici equilateri sono anche equiangoli.*

33. Sia ora in due triangoli sferici $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$, le formole (1) e (3) dell'equazione cardinale applicate a questi triangoli daranno

$$1\ldots\begin{cases}(m)\ldots\ \operatorname{sen}a\cos b=\operatorname{sen}c.\cos\beta+\operatorname{sen}b\cos a\cos\gamma\\(n)\ldots\ \operatorname{sen}a'\cos b'=\operatorname{sen}c'\cos\beta+\operatorname{sen}b'\cos a'\cos\gamma\end{cases}$$

$$2\ldots\begin{cases}(p)\ldots\ \operatorname{sen}b\cos a=\operatorname{sen}c\cos\alpha+\operatorname{sen}a\cos b\cos\gamma\\(q)\ldots\ \operatorname{sen}b'\cos a'=\operatorname{sen}c'\cos\alpha+\operatorname{sen}a'\cos b'\cos\gamma\end{cases}$$

moltiplicando (m) e (p) per $\operatorname{sen} c'$, e le due altre per $\operatorname{sen} c$ e sottraendo (n) da (m) e (q) da (p) si avrà

$$\operatorname{sen} a \cos b \operatorname{sen} c' - \operatorname{sen} a' \cos b' \operatorname{sen} c$$
$$- \cos\gamma (\operatorname{sen} b \cos a \operatorname{sen} c' - \operatorname{sen} b' \cos a' \operatorname{sen} c) = 0$$

$$\operatorname{sen} b \cos a \operatorname{sen} c' - \operatorname{sen} b' \cos a' \operatorname{sen} c$$
$$- \cos\gamma (\operatorname{sen} a \cos b \operatorname{sen} c' - \operatorname{sen} a' \cos b' \operatorname{sen} c) = 0$$

Queste due equazioni possono porsi sotto la seguente forma

$$P - Q\cos\gamma = 0,\ Q - P\cos\gamma = 0,\ \text{e da queste si ha}$$

$$\cos\gamma = \frac{P}{Q} = \frac{Q}{P};\ \text{epperò}\ P = Q;\ \text{cioè}$$

$$\operatorname{sen} a \cos b \operatorname{sen} c' - \operatorname{sen} a' \cos b' \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} b \cos a \operatorname{sen} c' - \operatorname{sen} b' \cos a' \operatorname{sen} c$$

ossia $\operatorname{sen} c' \operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} c \operatorname{sen}(a'-b')$; la quale dà $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$. Infatti si ha da questa equazione

$$\operatorname{sen} c : \operatorname{sen} c' = \operatorname{sen}(a-b) : \operatorname{sen}(a'-b');\ \text{ma è}$$

$$\operatorname{sen} c : \operatorname{sen} c' = \operatorname{sen}\gamma : \operatorname{sen}\gamma'\ (\text{II pag. } 159);\ \text{adunque sarà}$$

$$\operatorname{sen}\gamma : \operatorname{sen}\gamma' = \operatorname{sen}(a-b) : \operatorname{sen}(a'-b'),$$

epperò, essendo per ipotesi $\gamma = \gamma'$, sarà $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a'-b')$, adunque, poichè è $\operatorname{sen} c \operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} c' \operatorname{sen}(a'-b')$, sarà $\operatorname{sen} c = \operatorname{sen} c'$, cioè $c = c'$. Quanto ad a, a', b, b' è chiaro che l'equazione $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a'-b')$ dà $a = a'$, $b = b'$; poichè se potesse essere, per es., $a > a'$, sarà pure $b > b'$; e quindi $a + b > a' + b'$; lo che potrebbe verificare $a + b$ di specie differente di $a' + b'$; ed allora sarebbe $\alpha + \beta$ di specie differente di $\alpha' + \beta'$; lo che non è compatibile coll'ipotesi di $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$: adunque si deduce dall'ultima equazione $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$: cioè *se due triangoli sferici sono equiangoli saranno pure equilateri.*

La relazione $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ or dimostrata dà $P = 0$, $Q = 0$, come conviene ad equazioni fra quantità indeterminate; epperò sarà $\cos\gamma = \frac{P}{Q} = \frac{Q}{P} = \frac{0}{0}$; ciocchè dinota che γ ha un valore in-

determinato, come sappiamo d'altronde, giacchè i tre angoli de' triangoli sferici non essendo soggetti che alle due condizioni

$$\alpha+\beta+\gamma<6 \text{ quadranti}; \quad \alpha+\beta+\gamma>2 \text{ quadranti},$$

possono prendere tutt'i valori compatibili con queste due condizioni.

34. Sia ora $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $c=c'$, le formole (3) e (1) della equazione cardinale (F) applicate a questi triangoli sotto l'adottata condizione danno

$$(3)\ldots\begin{cases}\operatorname{sen} c.\cos\alpha=\operatorname{sen} b\cos a-\operatorname{sen} a\cos b\cos\gamma\\ \operatorname{sen} c.\cos\alpha=\operatorname{sen} b'\cos a'-\operatorname{sen} a'\cos b'\cos\gamma'\end{cases}$$

$$(1)\ldots\begin{cases}\operatorname{sen} c.\cos\beta=\operatorname{sen} a\cos b-\operatorname{sen} b\cos a\cos\gamma\\ \operatorname{sen} c.\cos\beta=\operatorname{sen} a'\cos b'-\operatorname{sen} b'\cos a\cos\gamma'\end{cases}$$

Prendendo la differenza di ogni coppia si avrà

$$\operatorname{sen} b\cos a-\operatorname{sen} b'\cos a'-\cos\gamma\operatorname{sen} a\cos b+\operatorname{sen} a'\cos b'\cos\gamma'=0$$
$$\operatorname{sen} a\cos b-\operatorname{sen} a'\cos b'-\cos\gamma\operatorname{sen} b\cos a+\operatorname{sen} b'\cos a'\cos\gamma'=0$$

Sommando e riducendo sarà

$$\operatorname{sen}(a+b)\operatorname{sen}^2\frac{\gamma}{2}-\operatorname{sen}(a'+b')\operatorname{sen}^2\frac{\gamma'}{2}=0;$$

la quale equazione, reggendo fra quantità indeterminate, non può avere altrimenti luogo che con $a+b=a'+b'$, $\gamma=\gamma'$, cioè $a=a'$, $b=b'$ (per essere $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$). Cioè *due triangoli sferici che hanno due angoli eguali col lato ad essi adjacente, avranno gli altri elementi eguali.*

35. Supponiamo ora $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $a=a'$, le formole (3) e (1) dell'equazione cardinale applicata a questi due triangoli situati sulla stessa sfera e su sfere eguali colla stabilita condizione diverranno

$$(3)\ldots\begin{cases}(m)\ldots\ \operatorname{sen} c.\cos\alpha+\operatorname{sen} a\cos b\cos\gamma=\operatorname{sen} b\cos a;\\ (n)\ldots\ \operatorname{sen} c'.\cos\alpha+\operatorname{sen} a\cos b'\cos\gamma'=\operatorname{sen} b'\cos a;\end{cases}$$

$$(1)\ldots\begin{cases}(p)\ldots\ \operatorname{sen} c.\cos\beta+\operatorname{sen} b\cos a\cos\gamma=\operatorname{sen} a\cos b;\\ (q)\ldots\ \operatorname{sen} c'.\cos\beta+\operatorname{sen} b'\cos a\cos\gamma'=\operatorname{sen} a\cos b'.\end{cases}$$

Moltiplicando (m) e (p) per $\operatorname{sen} c'$, e le altre due per $\operatorname{sen} c$; e sottraendo (n) da (m) e (q) da (p), si avrà

$$\begin{aligned}&\operatorname{sen} a(\operatorname{sen} c' \cos b \cos \gamma - \operatorname{sen} c \cos b' \cos \gamma')\\&-\cos a(\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c' - \operatorname{sen} b' \operatorname{sen} c) = 0\\&\cos a(\operatorname{sen} c' \operatorname{sen} b \cos \gamma - \operatorname{sen} c \operatorname{sen} b' \cos \gamma')\\&-\operatorname{sen} a(\operatorname{sen} c' \cos b - \operatorname{sen} c \cos b') = 0:\end{aligned}$$

sottraendo dalla prima di queste due la seconda e sciogliendo in fattori sarà

$\operatorname{sen} c'(1+\cos\gamma)\operatorname{sen}(a-b) - \operatorname{sen} c(1+\cos\gamma')\operatorname{sen}(a-b') = 0$; cioè

$$\operatorname{sen} c' \cos^2 \frac{\gamma}{2} \operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} c \cos^2 \frac{\gamma'}{2} \operatorname{sen}(a-b'),$$

la quale reggendo fra quantità indeterminate dà $c=c'$, $\gamma=\gamma'$, $a-b=a-b'$, epperò $b=b'$.

Cioè *se due triangoli sferici situati sulla stessa sfera o sopra sfere eguali hanno due angoli eguali e eguale un lato opposto ad uno degli angoli eguali, avranno gli altri elementi eguali.*

36. La (3) formola dell'equazione cardinale (F) si moltiplichi per $\operatorname{sen} b$ e la (5) per $\operatorname{sen} c$; si avrà

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos b \cos \gamma = \cos a \operatorname{sen}^2 b - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos \alpha \ldots (1)$$
$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos c \cos \beta = \cos a \operatorname{sen}^2 c - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos \alpha \ldots (2)$$

sottraendo (1) da (2) si avrà

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos c \cos \beta - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos b \cos \gamma = \cos a(\operatorname{sen}^2 c - \operatorname{sen}^2 b) \ldots (3)$$

Moltiplicando la (1) dall'equazione fondamentale per $\operatorname{sen} a \cos c$, si avrà

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos c \cos \beta + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} a \cos a \cos c . \cos \gamma = \operatorname{sen}^2 a \cos b \cos c \ldots (4)$$

La differenza di (3) e (4) ordinata per $\cos\gamma$ darà

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos\gamma(\cos b + \cos a \cos c) = \cos a(\operatorname{sen}^2 b - \operatorname{sen}^2 c) + \operatorname{sen}^2 a \cos b \cos c;$$

da cui si ha sostituendo $1-\cos^2 b$ a $\operatorname{sen}^2 b$, $1-\cos^2 c$ a $\operatorname{sen}^2 c$

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos\gamma(\cos b + \cos a \cos c) = \cos a(\cos^2 c - \cos^2 b) + \operatorname{sen}^2 a \cos b \cos c \ldots (5)$$

Facciamo variare in questa formola γ e c solamente, si avrà

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos\gamma' (\cos b + \cos a \cos c') = \cos a (\cos^2 c' - \cos^2 b) + \operatorname{sen}^2 a \cos b \cos c' \ldots (6).$$

L'ipotesi di $c > c'$ rende

$\cos^2 c - \cos^2 b < \cos^2 c' - \cos^2 b$; $\operatorname{sen}^2 a \cos b \cos c < \operatorname{sen}^2 a \cos b \cos c'$

quindi sopprimendo nelle due equazioni (5) e (6) il fattore comune $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$, sarà

$\cos\gamma (\cos b + \cos a \cos c) < \cos\gamma' (\cos b + \cos a \cos c') \ldots$ (7); epperò

$$\cos\gamma < \cos\gamma' \frac{\cos b + \cos a \cos c'}{\cos b + \cos a \cos c};$$

e tanto più sarà $\cos\gamma < \cos\gamma'$ (essendo il coefficiente di $\cos\gamma' > 1$): quindi sarà $\gamma > \gamma'$; cioè *se due triangoli hanno due lati eguali rispettivamente e'l terzo lato di uno sia maggiore del terzo lato dell'altro, l'angolo opposto al lato maggiore è più grande dell'angolo opposto al lato minore.*

37. Se l'equazioni (5) e (6) si risolvono per c, c' si avrà

$$\cos c = \frac{\operatorname{sen} a (\operatorname{sen} b \cos\gamma - \operatorname{tang} a \cos b)}{2}$$

$$\pm \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 a (\operatorname{sen} b \cos\gamma - \operatorname{tang} a \cos b)^2 + 4 \cos b (\cos b + \operatorname{tang} a \operatorname{sen} b \cos\gamma)}}{2}$$

$$\cos c' = \frac{\operatorname{sen} a (\operatorname{sen} b \cos\gamma' - \operatorname{tang} a \cos b)}{2}$$

$$\pm \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 a (\operatorname{sen} b \cos\gamma' - \operatorname{tang} a \cos b)^2 + 4 \cos b (\cos b + \operatorname{tang} a \operatorname{sen} b \cos\gamma')}}{2}$$

le quali intuitivamente mostrano che nell'ipotesi di $\gamma > \gamma'$ il secondo membro della prima di queste due equazioni è minore del 2° membro della seconda di essa; epperò nell'ipotesi di $\gamma > \gamma'$ sarà $\cos c < \cos c'$; cioè $c > c'$; ch'è l'inverso del teorema precedente.

(*) Questi due teoremi sono una conseguenza immediata della

formola (I) § 5, la quale per altro è la stessa equazione (5) n.° 36, che abbiamo dimostrato quassù, ma mascherata. Infatti questa equazione dà

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos\gamma = \frac{\cos a(\cos^2 c - \cos^2 b) + \operatorname{sen}^2 a \cos b \cos c}{\cos b + \cos a \cos c} =$$

$$\frac{\cos a \cos^2 c - \cos a \cos^2 b + (1 - \cos^2 a) \cos b \cos c}{\cos b + \cos a \cos c} =$$

$$\frac{(\cos b + \cos a \cos c)(\cos c - \cos a \cos b)}{\cos b + \cos a \cos c} = \cos c - \cos a \cos b,$$

ch'è l'equazione (I).

38. Stabiliamo ora le formole pe' triangoli sferici rettangoli. Noi potremmo dedurle dalle formole (I) § 5, (II) § 6, (III) § 7 e (IV) § 8, come hanno fatto Bertrand, De Gua, Eulero, Lagrangia, e tutti gli altri analisti: ma per serbare l'unità di metodo, le trarremo dalla stessa nostra equazione fondamentale (F) fra cinque elementi del triangolo sferico. Sulle prime supponiamo $\gamma = 90$ epperò $\cos\gamma = 0$ nelle formole (1) e (3); e nelle (2) e (4) dell'equazione cardinale (F), avremo

$$(G)\ldots \begin{cases} (1)\ldots \operatorname{sen} c . \cos\beta = \operatorname{sen} a \cos b \\ (3)\ldots \operatorname{sen} c . \cos\alpha = \operatorname{sen} b \cos a \\ (2)\ldots \cos\beta = \operatorname{tang} a \cot c \\ (4)\ldots \cos\alpha = \operatorname{tang} b \cot c \end{cases} \ldots (I)$$

39. Eliminando $\cos\beta$ fra (1) e (2) e riducendo, si avrà

$$\cos c = \cos a \cos b \ldots (II).$$

40. La formola (2) dell'equazione (G) posta sotto la forma $\operatorname{sen} c \cos a \cos\beta = \operatorname{sen} a \cos c$ si sommi con (1) e si sottragga dalla stessa (1) della medesima equazione (G), si avrà

$$\operatorname{sen} c \cos\beta (1 + \cos a) = \operatorname{sen} a (\cos b + \cos c)$$
$$\operatorname{sen} c \cos\beta (1 - \cos a) = \operatorname{sen} a (\cos b - \cos c)$$

Moltiplicando membro a membro queste due equazioni, sarà

$\text{sen}^2 c \cos^2 \beta = (\cos^2 b - \cos^2 c)$, e ponendo per $\cos^2$ $1 - \text{sen}^2$, sarà riducendo $\text{sen}^2 c \,\text{sen}^2 \beta = \text{sen}^2 b$; da cui si ha

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ldots\ \text{sen}\, b = \text{sen}\, c . \text{sen}\, \beta \\ (2)\ldots\ \text{sen}\, a = \text{sen}\, c . \text{sen}\, \alpha\end{array}\right\}\ldots\ (\text{III})$$

41. Eliminando $\text{sen}\, a$ fra (1) dell'equazioni (G) e (2) dell'equazioni (III), e riducendo si avrà

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ldots\ \cos\beta = \cos b \,\text{sen}\, \alpha \\ (2)\ldots\ \cos\alpha = \cos a \,\text{sen}\, \beta\end{array}\right\}\ldots\ (\text{IV})$$

42. La (4) di (G) è $\cos\alpha = \text{tang}\, b \cot c$, e la (2) di (III)

$$\text{sen}\, \alpha = \frac{\text{sen}\, a}{\text{sen}\, c}:$$

dividendo la prima di queste due per l'altra, si avrà

$$\cot\alpha = \frac{\text{tang}\, b \cos c}{\text{sen}\, a};\ \text{e per simmetria}$$

$$\cot\beta = \frac{\text{tang}\, a \cos c}{\text{sen}\, b}:$$

moltiplicando membro a membro sarà

$$\cot\alpha \cot\beta = \frac{\text{tang}\, b \cos c}{\text{sen}\, a} . \frac{\text{tang}\, a \cos c}{\text{sen}\, b} = \frac{\cos^2 c}{\cos a \cos b} = \cos c\ (39\ \text{II})\ldots(\text{V}).$$

La formola (3) di (G) dà $\cos\alpha = \dfrac{\text{sen}\, b \cos a}{\text{sen}\, c}$; ma la formola (2) di (III) dà $\text{sen}\, \alpha = \dfrac{\text{sen}\, a}{\text{sen}\, c}$; dividendo membro a membro queste due equazioni sarà

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ldots\ \cot\alpha = \text{sen}\, b \cot a \\ (2)\ldots\ \cot\beta = \text{sen}\, a \cot b\end{array}\right\}\ldots\ (\text{VI})$$

43. Il problema trigonometrico spettante al triangolo sferico rettangolo consiste in determinare i cinque elementi ignoti di questo: e poichè esiste sempre un dato nel triangolo sferico rettangolo, cioè l'angolo retto, i cinque elementi debbono combinarsi a 3

a 3, e in ogni combinazione entra un elemento ignoto con due elementi noti i quali coll' angolo retto fanno le tre quantità note. Or poichè cinque quantità combinate a 3 a 3 danno $\frac{5.4.3}{2.3}=10$ combinazioni differenti, dobbiamo vedere se le sei precedenti equazioni bastano alla compiuta soluzione del triangolo sferico rettangolo. A tal oggetto le dieci combinazioni sono le seguenti

$$1^a\ldots a, b, c;\ 2^a\ldots \begin{Bmatrix} a, c, \alpha \\ b, c, \beta \end{Bmatrix};\ 3^a\ldots \begin{Bmatrix} \alpha, \beta, c \\ \alpha, \beta, a \\ \alpha, \beta, b \end{Bmatrix};\ 4^a\ldots \begin{Bmatrix} c, a, \beta \\ c, b, \alpha \\ a, b, \alpha \\ a, b, \beta \end{Bmatrix}$$

La 1ª è risoluta dalla formola (II); la 2ª dalla equazione (III): la 3ª delle formole (IV) e (V): da ultimo la 4ª dall' equazioni (I) e (VI).

Epperò le sei formole per noi qui dedotte dall' equazione cardinale bastano alla soluzione del triangolo sferico rettangolo. E si deduce da tutto ciò che si è detto qui sopra che le due equazioni differenti (G) contengono tutti gli elementi della risoluzione de' triangoli sferici.

44. L'equazione (II) cioè $\cos c = \cos a \cos b$ dimostra che $\cos c$ è positivo sotto le due condizioni, 1ª $a < 90°$, $b < 90°$; 2ª $a > 90°$, $b > 90°$, c è negativo quando a e b sono di specie diversa.

Epperò *nel triangolo sferico rettangolo se i due lati che comprendono l'angolo retto sono della stessa specie il lato opposto all'angolo retto sarà minore del quadrante, e sarà maggiore quando essi sono di specie diversa.*

45. Se uno de' lati a che comprendono l'angolo retto è eguale al quadrante sarà $\cos a = 0$, epperò $\cos c = 0$, e $\cos b = \frac{0}{0}$.

Cioè *se uno de' lati che comprendon l' angol retto è quadrante, tale sarà pure il lato opposto all' angolo retto, e l'altro è indeterminato, cioè potrà essere eguale maggiore o minore del quadrante.*

46. L'equazione (IV) cioè $\cos \beta = \cos b \operatorname{sen} \alpha$, essendo $\operatorname{sen} \alpha > 0$ (16) ci mostra che la specie di β dipende da quella del lat' oppo-

sto b; cioè se b sarà retto ottuso o acuto, tale sarà pure β e reciprocamente. Adunque *nel triangolo sferico rettangolo gli angoli obbliqui seguono sempre la specie de' lati opposti e reciprocamente.*

47. Segue da tutto ciò, 1° che se un triangolo sferico ha i suoi tre lati quadranti, sarà trirettangolo, come sono gli otto triangoli sferici ne'quali si divide la superficie sferica quando si segnano su di essa, sulle prime due cerchi massimi perpendicolari fra loro, e poi si fanno questi segare da un altro cerchio massimo perpendicolare ad entrambi. Tali sono sul globo terrestre artificiale i due coluri e l'equatore: 2° se in un triangolo sferico dal vertice di un angolo si abbassa l'arco normale sul lato opposto, quest'arco perpendicolare cadrà fra'lati se gli altri due angoli sono della stessa specie; e cadrà fuori di essi se sono di specie diversa; poichè se cadesse anche fra'lati quando gli angoli sono di specie diversa, quest'arco normale sarebbe della specie dell'angolo acuto nel triangolo rettangolo che ha l'acuto, e della specie dell'ottuso nell'altro triangolo rettangolo, lo che è assurdo.

48. (*) Nelle trigonometrie trattate sinteticamente si dimostrano tre soli teoremi de'sei che risguardano il triangolo sferico rettangolo, e gli altri tre si tirano da'primi per mezzo del così detto triangolo *complementario*.

Infatti se la formola (III) $\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} \beta$ si applichi al triangolo sferico in cui un lato $c = 90° - b$, e un lato $a = 90° - \beta$; sarà $\operatorname{sen} b = \cos c$, $\operatorname{sen} c = \cos b$ e $\operatorname{sen} \beta = \cos a$; onde la formola (III) diverrà $\cos c = \cos a \cos b$, ch'è identica alla (II). Or questa reciproca dipendenza delle sei formole de'triangoli sferici rettangoli è intuitiva col nostro sistema di trarre tutta la trigonometria sferica da una formola fondamentale colle forze della sola algebra. E infatti tutte le formole che risguardano i triangoli sferici rettangoli non sono per noi che derivazioni dell'equazioni (G), le quali non si riducono che a due sole formole differenti. Del resto si potrà sempre, date tre equazioni delle sei che risguardano i triangoli sferici rettangoli, determinare le altre tre con maneggi algebraici. Infatti supponiamo note l'equazione (I), la (III), la (IV); cioè $\cos \alpha = \operatorname{tang} b \cot c$ (1), $\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} \beta$ (2), $\cos \beta = \cos b \operatorname{sen} \alpha$ (3).

Prendiamo da (3) $\cos b = \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha}$; e dividiamo membro a membro la (2) per questa, si avrà $\operatorname{tang} b = \operatorname{sen} c \operatorname{sen}\alpha \operatorname{tang}\beta$; ma da (1) abbiamo $\operatorname{tang} b = \frac{\cos\alpha}{\cot c} = \cos\alpha \frac{\operatorname{sen} c}{\cos c}$; adunque sarà $\operatorname{sen}\alpha \operatorname{tang}\beta = \frac{\cos\alpha}{\cos c}$, che dà $\cos c = \cot\alpha \cot\beta$, ch'è la (V).

Parimente abbiamo da (2) $\operatorname{sen}\beta = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} c}$; ma la formola (2) di (IV) dà pure $\operatorname{sen}\beta = \frac{\cos\alpha}{\cos a}$; sicchè sarà $\cos\alpha = \frac{\operatorname{sen} b \cos a}{\operatorname{sen} c}$, ma la (2) di (I) è $\cos\alpha = \operatorname{tang} b \cot c$; sicchè sarà $\operatorname{tang} b \cot c = \frac{\operatorname{sen} b \cos a}{\operatorname{sen} c}$, da cui si ha $\cos c = \cos a \cos b$, ch'è la (II).

Finalmente si ha da (2) $\operatorname{sen} c = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen}\beta}$, e dalla (V) che abbiamo dedotta dalla (IV), $\cos c = \frac{\cot\alpha}{\operatorname{tang}\beta}$: dividendo membro a membro, si avrà $\operatorname{tang} c = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{tang}\beta}{\operatorname{sen}\beta \cot\alpha} = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{tang}\alpha}{\cos\beta}$; ma la (1) di (I) dà $\operatorname{tang} c = \frac{\operatorname{tang} a}{\cos\beta}$; adunque sarà $\operatorname{tang} a = \operatorname{sen} b \operatorname{tang}\alpha$, che trasformata è identica alla (1) della (VI).

49. Abbiamo veduto che la risoluzione compiuta dal problema trigonometrico-sferico nelle sue diverse ipotesi ritraevasi dalle quattro formole (n.i 5, 6, 7 e 8), cioè

$$\cos a - \cos b \cos c - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos\alpha = 0;$$
$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} b - \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen} a = 0$$
$$\cos\alpha + \cos\beta \cos\gamma - \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma \cos a = 0,$$
$$\operatorname{sen}\beta \cot\alpha + \cos c . \cos\beta - \cot a \operatorname{sen} c = 0.$$

La prima terza e quarta non essendo equazioni binomie, com'è la seconda, non sono atte all'applicazione del calcolo logaritmico,

epperò gli analisti sogliono trasformarle in equazioni binomie. Quando sono dati i tre lati, o i tre angoli noi abbiamo (§ 25, *K*) recate le formole binomie nelle quali gli analisti trasformano la prima e la terza delle quattro formole predette; esse sono

$$\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}=\frac{-\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma};$$

$$\cos^2\frac{a}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}}{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}$$

$$\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2}}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c};$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}.$$

Osserviamo solamente che, volendosi far uso della prima di queste per determinare un lato per mezzo degli angoli, il segno negativo del 2° membro non è che apparente; poichè, essendo $\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}<0$, quel segno negativo si cambia in positivo.

(*) Tante volte la trasformazione di una delle precedenti equazioni trinomie in binomia si fa per mezzo di un angolo ausiliario introdotto in una equazione trinomia per mezzo di una formola di triangolo sferico rettangolo. Così per esempio se si volesse un lato per mezzo degli altri due e dell'angolo di questi compresi, la prima formola darà

$$\cos a=\cos b\cos c+\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c\cos\alpha=\cos c(\cos b+\operatorname{sen}b\operatorname{tang}c\cos\alpha):$$

facciasi

$$\operatorname{tang}c\cos\alpha=\operatorname{tang}\varphi\ldots(1),\ \text{sarà}\ \cos a=\frac{\cos c}{\cos\varphi}\cos(b-\varphi)\ldots(2);$$

ed è questa la formola binomia nella quale abbiamo trasformata

l'equazione trinomia $\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos \alpha$, facendo uso dell'angolo ausiliario φ introdotto in questa equazione per mezzo della formola $\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} c \cos \alpha$: e poichè questa è la (I) delle sei equazioni che danno la risoluzione compiuta de'triangoli sferici rettangoli, e ch'appartiene al triangolo sferico rettangolo di cui c è il lato opposto all'angolo retto, α è uno degli angoli obbliqui, e φ è il lato adjacente a α, ne segue che coll'introdurre nella data equazione trinomia l'angolo ausiliario φ colla formola $\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} c \cos \alpha$ non abbiamo fatto altro che abbassare nel triangolo sferico obbliquangolo un arco normale del vertice dell'angolo β sul lat'opposto b, il quale rimane così diviso ne' due segmenti φ, $(b - \varphi)$; cosicchè a determinare b concorrono le due equazioni

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} c \cos \alpha; \quad \cos a = \frac{\cos c}{\cos \varphi} \cos (b - \varphi).$$

50. Questa ultima equazione ci dà $\cos \varphi : \cos(b - \varphi) = \cos c : \cos a$, cioè *che se in un triangolo sferico del vertice di un angolo si abbassa un arco normale sul lato opposto, i coseni de' segmenti di questo saranno in ragion inversa da' lati adjacenti a' medesimi segmenti.*

51. Quindi se $a = c$ sarà $\varphi = b - \varphi$ e reciprocamente. Cioè *se dal vertice dell'angolo fatto da due archi eguali si faccia cadere sul lat'opposto un arco normale, questo dividerà in parti eguali detto lato; e se l'arco normale che si fa scendere da un angolo di triangolo sferico sul lato opposto divide questo per metà, detto angolo sarà contenuto da due archi eguali.*

(*) 52. Parimente l'equazione $\cos \gamma = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos c - \cos \alpha \cos \beta$ (IV n.° 8) darà

$$\cos \gamma = \cos \beta (\operatorname{sen} \alpha \operatorname{tang} \beta \cos c - \cos \alpha) = \cos \beta (\operatorname{sen} \alpha \cot \varphi - \cos \alpha)$$
$$= \frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \varphi} \operatorname{sen} (\alpha - \varphi) \ldots (1);$$

e si vede che cercandosi γ per α, β, c, si avrà per mezzo delle due equazioni

$\cot \varphi = \operatorname{tang} \beta \cos c$ (V de' triang. sferici rett.), $\cos \gamma = \frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \varphi} \operatorname{sen} (\alpha - \varphi)$:

e poichè φ e $\alpha-\varphi$ sono i due segmenti di α; e β, γ sono i due angoli alla base adjacenti rispettivamente φ e $\alpha-\varphi$, ne segue che la formola (1) darà un teorema di geometria sferica; e che di più farà conoscere che se gli angoli α, β alla base sono eguali, anche i segmenti di α saranno eguali e eguali i lati b, c, non che i segmenti di a. Noi non ci tratteremo di più su di queste trasformazioni che potranno riscontrarsi in tutte le trigonometrie analitiche, e sopratutto nella bella trigonometria del nostro distinto collega signor Professore Amante ove sono notate tutte queste avvertenze senza lasciar nulla a desiderare.

Passiamo a determinare le tanto celebri analogie di Nepero per risolvere facilmente e senza il bisogno di ricorrere alle precedenti trasformazioni, un triangolo sferico quando sono dati *o due lati e l'angolo da questi compreso; o due angoli e il lato ad essi adjacente.*

53. Prendiamo le due formole dell'equazione cardinale (*F* n.° 4)

$$\operatorname{sen} c . \cos\alpha + \operatorname{sen} a \cos b \cos\gamma = \operatorname{sen} b \cos a \ldots$$
$$\operatorname{sen} c . \cos\beta + \operatorname{sen} b \cos a \cos\gamma = \operatorname{sen} a \cos b :$$

sommiamole membro a membro, riducendo sarà

$$\operatorname{sen} c(\cos\alpha + \cos\beta) + \operatorname{sen}(a+b)\left(1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\gamma}{2}\right) = \operatorname{sen}(a+b), \text{ ossia}$$

$$\operatorname{sen} c(\cos\alpha + \cos\beta) = 2\operatorname{sen}(a+b)\operatorname{sen}^2\frac{\gamma}{2} \ldots\ldots (1)$$

Sottraggasi dalla seconda di esse la prima, membro a membro, si avrà

$$\operatorname{sen} c(\cos\beta - \cos\alpha) + (\operatorname{sen} b \cos a - \operatorname{sen} a \cos b)\left(2\cos^2\frac{\gamma}{2} - 1\right) = \operatorname{sen}(a-b);$$

ossia

$$\operatorname{sen} c(\cos\beta - \cos\alpha) = 2\operatorname{sen}(a-b)\cos^2\frac{\gamma}{2} \ldots\ldots (2).$$

Dividendo (1) per (2) si avrà ((*R*) pag. 68)

$$\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\frac{\cot\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tang\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\operatorname{sen}(a-b)}\tang^2\frac{\gamma}{2}\ldots\ldots(3)$$

ma abbiamo (pag. 68)

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta}=\frac{\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}b}{\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}b}=\frac{\tang\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tang\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\tang\frac{a+b}{2}}{\tang\frac{a-b}{2}}$$

da cui si ha

$$\frac{1}{\tang\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\tang\frac{a+b}{2}}{\tang\frac{a-b}{2}}\cdot\cot\frac{\alpha+\beta}{2}\ldots\ldots(4):$$

sostituendo questo valore in (3), si avrà

$$\cot^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\tang\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}(a-b)}\cdot\frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\tang\frac{a+b}{2}}\tang^2\frac{\gamma}{2}\ldots\ldots(5);$$

ma è $\frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}:2\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}$; epperò

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\tang\frac{\varphi}{2}}=2\cos^2\frac{\varphi}{2}:$$

sostituendo in (5), si avrà

$$\cot^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos^2\frac{a+b}{2}}{\cos^2\frac{a-b}{2}}\tang^2\frac{\gamma}{2}\ldots\ldots(6):$$

cioè

$$(A)\ldots \cot\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}\tang\frac{\gamma}{2},\ \text{o}\ \tang\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2}.$$

54. Sostituendo il precedente valore di $\cot\frac{\alpha+\beta}{2}$ nell'equazione (4) scritta così

$$\tang\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\frac{\tang\frac{a-b}{2}}{\tang\frac{a+b}{2}}\cdot\frac{1}{\cot\frac{\alpha+\beta}{2}},\ \text{si avrà}$$

$$\tang\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\frac{\tang\frac{a-b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{\tang\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+b}{2}}\cdot\frac{1}{\tang\frac{\gamma}{2}};\ \text{cioè}$$

$$(B)\ldots \tang\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\frac{\operatorname{sen}\frac{(a-b)}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2},\ \text{o}\ \cot\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\frac{\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}\tang\frac{\gamma}{2}.$$

55. Dalle formole (A) e (B) potremmo trarre le formole analoghe per aver due lati quando sono dati i due angoli ad essi opposti e'l lato a questi adjacente; ma per l'unità di questo lavoro noi le tireremo dalla stessa nostra formola cardinale. A tal oggetto prendiamo le formole della medesima

$$\operatorname{sen}c.\cos a=\operatorname{sen}b\cos\alpha+\operatorname{sen}a\cos c.\cos\beta\ldots$$
$$\operatorname{sen}c.\cos b=\operatorname{sen}a\cos\beta+\operatorname{sen}b\cos c.\cos\alpha:$$

sommandole membro a membro, si avrà

$$\operatorname{sen}c(\cos a+\cos b)=(1+\cos c)(\operatorname{sen}a\cos\beta+\operatorname{sen}b\cos\alpha);$$

ponendo per sen a l'equivalente $\frac{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, \alpha}{\text{sen}\, \beta}$, e riducendo sarà

$$\text{sen}\, c(\cos a + \cos b) = (1 + \cos c)\frac{\text{sen}\, b}{\text{sen}\, \beta}\text{sen}(\alpha + \beta) \ldots\ldots (7)$$

sottraendo dalla seconda delle due precedenti formole la prima, sarà

$$\text{sen}\, c(\cos b - \cos a = (1 - \cos c)(\text{sen}\, a \cos \beta - \text{sen}\, b \cos \alpha) =$$

$$(1 - \cos c)\left(\frac{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, \alpha}{\text{sen}\, \beta}\cos \beta - \text{sen}\, b \cos \alpha\right) = (1 - \cos c)\frac{\text{sen}\, b}{\text{sen}\, \beta}\text{sen}(\alpha - \beta) \ldots (8):$$

dividendo (7) per (8) si avrà

$$\frac{\cos a + \cos b}{\cos b - \cos a} = \frac{\cot \frac{a+b}{2}}{\text{tang}\, \frac{a-b}{2}} = \cot \frac{c}{2} \cdot \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\text{sen}(\alpha - \beta)} \ldots\ldots (9);$$

ma abbiamo che la formola (4) ci dà

$$\text{tang}\, \frac{a-b}{2} = \frac{\text{tang}\, \frac{\alpha - \beta}{2}}{\text{tang}\, \frac{\alpha + \beta}{2}} \cdot \text{tang}\, \frac{a+b}{2}$$

sostituendo in (9), e facendo $\text{tang}\, \frac{a+b}{2} = \frac{1}{\cot \frac{\alpha + b}{2}}$, si avrà

$$\cot^2\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\text{tang}\, \frac{\alpha - \beta}{2}}{\text{sen}(\alpha - \beta)} \cdot \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\text{tang}\, \frac{\alpha - \beta}{2}} \cot^2 \frac{c}{2} = \cot^2 \frac{c}{2} \cdot \frac{\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}} \ldots (10);$$

cioè

$$(C) \ldots \cot \frac{a+b}{2} = \cot \frac{c}{2} \frac{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}; \text{ o } \text{tang}\, \frac{a+b}{2} = \text{tang}\, \frac{c}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}.$$

56. Sostituendo il valore di $\cot\frac{a+b}{2}$ in (4) scritto così

$$\tang\frac{a-b}{2}=\frac{\tang\frac{\alpha-\beta}{2}}{\tang\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\frac{1}{\cot\frac{a+b}{2}};\text{ si avrà}$$

$$\tang\frac{a-b}{2}=\frac{\tang\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\tang\frac{\alpha+\beta}{2}}\tang\frac{c}{2}=\tang\frac{c}{2}\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

onde avremo

$$(D)\ldots\ \tang\frac{a-b}{2}=\tang\frac{c}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}};\text{ o }\cot\frac{a-b}{2}=\cot\frac{c}{2}\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

L'equazioni (A), (B), (C), (D) sono quelle conosciute sotto il nome di *Analogie di Nepero.* Fra le tante dimostrazioni più o meno complicate che queste hanno ricevute, vogliamo sperare che gli Analisti non troveranno questa nostra dimostrazione inferiore alle altre più semplici e più brevi e più eleganti: ed essa poi è pregevole al nostro assunto per l' unità del metodo da noi seguito, giacchè discende dalla stessa nostra equazione fondamentale (F).

57. Quando si conoscono due lati a, b di un triangolo sferico coll'angolo α opposto ad uno di essi; si potranno facilmente determinare le rimanenti quantità nel seguente modo.

Sulle prime si determinerà β per mezzo di $\operatorname{sen}\beta=\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}b}{\operatorname{sen}a}$; indi si determinerà γ per mezzo di una delle formole (A), o (B) (53 o 54) dell'analogie di Nepero; cioè

$$\tang\frac{\gamma}{2}=\cot\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}};\ \tang\frac{\gamma}{2}=\cot\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}}:$$

e finalmente si determinerà c, facendo uso o della formola (C) (55) o dell'altra (D) (56) cioè

$$\tang\frac{c}{2}=\tang\frac{a+b}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}};\quad \tang\frac{c}{2}=\tang\frac{a-b}{2}\cdot\frac{\sen\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sen\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Ma bisogna riflettere che l'ipotesi di due lati e dell'angolo opposto ad uno di essi può menare a due soluzioni differenti; o, come suol dirsi dagli analisti, può essere *un caso dubbio;* poichè il valore di β essendo dato per un seno, questo è comune a due archi supplementi l'uno dall'altro: ed infatti se si sostituisce $\sqrt{1-\cos^2\beta}$ a $\sen\beta$, si avrà un'equazione di 2° grado epperò due valori.

Parimente quando sono dati due angoli α, β e un lato a opposto ad uno di essi, la soluzione può riportarsi alla precedente mercè il triangolo polare nel quale avremo i due lati a', b' e l'angolo α' opposto ad a'; onde potremo in questo determinare β', γ', c', i quali ci daranno rispettivamente b, c, γ come supplementi rispettivamente di β', γ', c'. Lo che mostra che la ipotesi di due angoli e un lato opposto ad uno di essi può condurre anche a due soluzioni.

Se vogliamo poi trattare questo problema direttamente opereremo nel seguente modo.

Sulle prime determineremo b per mezzo di $\sen b=\frac{\sen\beta\sen a}{\sen\alpha}$; indi γ per mezzo delle formole (A) o (B) di Nepero (53 e 54), cioè

$$\tang\frac{\gamma}{2}=\cot\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}};\ \text{o}\ \tang\frac{\gamma}{2}=\cot\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\frac{\sen\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}$$

e finalmente determineremo c per mezzo di una delle due altre formole di Nepero (55 e 56), cioè

$$\tang\frac{c}{2}=\tang\frac{a+b}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}};\quad \tang\frac{c}{2}=\tang\frac{a-b}{2}\cdot\frac{\sen\frac{(\alpha+\beta)}{2}}{\sen\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

La doppia soluzione, della quale quassù abbiamo parlato, riducesi delle volte, per delle condizioni particolari, ad una sola, e talvolta amendue le soluzioni svaniscono: lo che accade quando uno de' valori che si cerca o amendue sono assurdi; come sarebbe il lato o l'angolo che si cerca eguale o maggiore di 180°, o l'uno o l'altro eguale a zero; o che uno o amendue i valori del lato ritrovato unito a' dati desse una somma eguale o maggiore di 360°, e che non si verificassero le condizioni

$$A+B+C\begin{cases}>\text{due quad.}\\<\text{sei quad.}\end{cases};\ A+B-C<180^\circ \text{ ec.}$$

Noi tralasceremo tutt' i particolari dell' analisi delle condizioni che conducono, nelle due ipotesi 1ª a, b, α, 2ª α, β, a, a due soluzioni ad una sola o a nessuna. I giovanetti potranno leggere con molto profitto la facile e compiuta discussione di questi casi nella bella trogonometria del professore Fedele Amante; la quale analisi è, a nostro credere, preferibile a quante ne sono state fatte finora. Dalla medesima opera noi estrarremo i seguenti criterii generali

Dato α colla sola condizione di $\alpha<180$ $\begin{cases}\text{Se } a>b, \text{ e } a+b<180\\ \text{o } a<b, \text{ e } a+b>180\end{cases}$ una soluzione $\begin{cases}\text{e } B<90^\circ\\ B>90^\circ\end{cases}$

Dato $\alpha<90^\circ$. $\begin{cases}\text{Se } a<b, \text{ e } a+b<180\ldots \text{ due soluzioni}\\ \text{Se } a>b, \text{ e } a+b>180\ldots \text{ nessuna soluzione}\end{cases}$

Dato $\alpha>90^\circ$. $\begin{cases}\text{Se } a>b, \text{ e } a+b>180\ldots \text{ due soluzioni}\\ \text{Se } a<b, \text{ e } a+b<180\ldots \text{ nessuna soluzione}\end{cases}$

Se $\operatorname{sen} a<\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} b$..... nessuna soluzione

Dato a sotto la sola condiz.e di $a<180$ $\begin{cases}\text{Se } \alpha<\beta, \text{ e } \alpha+\beta>180\\ \text{o } \alpha>\beta, \text{ e } \alpha+\beta<180\end{cases}$ una soluzione $\begin{cases}b>90^\circ\\ b<90^\circ\end{cases}$

Dato $a>90^\circ$. $\begin{cases}\text{Se } \alpha>\beta, \text{ e } \alpha+\beta>180\ldots \text{ due soluzioni}\\ \text{Se } \alpha<\beta, \text{ e } \alpha+\beta<180\ldots \text{ nessuna soluzione}\end{cases}$

Dato $a < 90°$. $\begin{cases} \text{Se } \alpha < \beta, \text{ e } \alpha + \beta < 180 \ldots \text{ due soluzioni} \\ \text{Se } \alpha > \beta, \text{ e } \alpha + \beta > 190 \ldots \text{ nessuna soluzione} \end{cases}$

Se $\operatorname{sen} \alpha < \operatorname{sen} a \operatorname{sen} \beta \ldots\ldots$ nessuna soluzione.

Soggiungeremo alcuni pochi e facilissimi teoremi su'piani le cui dimostrazioni dipendono da quelle che abbiamo date nella prima parte, epperò ci dispenseremo di ripeterle.

58. Avendo il piano due dimensioni, una sola retta non basta a determinarlo: ma fa uopo di due rette o parallele o inclinate fra loro, e generalmente di tre punti non posti per diritto; poichè tre punti comunque presi determinano un triangolo, epperò le due dimensioni del piano. Adunque *un piano è determinato da tre dati punti*, o *da due rette*.

59. Segue da ciò che se una retta è perpendicolare a due rette che si segano, al punto d'intersezione, sarà perpendicolare al piano determinato da queste due rette.

60. (Fig. 49). Siano i due piani *AC*, *BD* che si segano nella loro comune intersezione *BE*; e s'intendano tirate, la *NM* nel piano *BD* e la *QNP* nel piano *AC*, entrambe perpendicolari alla loro comune intersezione *BE*: il piano *BD* farà coll'altro *AC* due angoli *MNQ*, *MNP* i quali, essendo insieme presi eguali a due retti (pag. 21 n.° 25), ne segue *che se due piani s'incontrano, faranno gli angoli dall'una e dall'altra parte eguali a due retti*.

61. (Fig. 50). Se una retta *AP* è perpendicolare al piano *MN*, ogni piano che passerà per *AP* sarà perpendicolare allo stesso piano: ed infatti, tirata nel piano *MN* la *PS* perpendicolare alla comune sezione *PQ*, sarà *PS* perpendicolare anche alla *AP*, per esser questo perpendicolare al piano; epperò l'angolo de'piani sarà retto (n.° 21).

62. (Fig. 51). Se due piani *PQ*, *RS* sono entrambi perpendicolari ed una retta *mn*, i detti piani saranno paralleli. Poichè, facendo intersegare i piani *PQ*, *RS* da un altro piano *amnb*, che passa per *mn*, le cui intersezioni co'piani dati sono *am*, *bn*, sarà $amn = 90° = mnb$; epperò le due rette *am*, *bn* sono parallele (pag. 39); ed essendo queste rette situate ne'piani *PQ*, *RS*, anche

questi saranno paralleli, non potendo questi incontrarsi senza incontrarsi le rette medesime.

Segue da ciò che le comuni intersezioni am, bn di due piani paralleli PQ, RS con un altro piano $mnba$ sono parallele, poichè queste non potrebbero incontrarsi senza che s'incontrassero i piani.

Sicchè se due piani PQ, RS sono paralleli, e una retta mn è perpendicolare ad uno di essi PQ, sarà anche perpendicolare all'altro RS: poichè, facendo passare per mn il piano $mabn$ che sega l'uno e l'altro, il primo in ma, e'l secondo in nb. sarà ma parallela ad nb (prec.), epperò sarà $bnm = nma = 90°$; e dimostrando lo stesso per altre intersezioni, la mn sarà perpendicolare ad entramb'i piani (59).

63. (Fig. 52). Ma facciamo vedere come direttamente la nostra equazione fondamentale giugne a dimostrare le verità di geometria solida. Sia AP perpendicolare al piano MN, e da P si supponga tirata la PQ perpendicolare alla BC presa nello stesso piano; facciasi $QB = QC$, e si tirino la AB, AC, AQ; PB, PC; sarà $PB = PC$ (pag. 46), epperò
$AB = \sqrt{AP^2 + PB^2} = AC = \sqrt{AP^2 + PC^2}$ (pag. 22, n.° 27). Siano $PB = PC = b$; $AB = AC = c$, $AP = p$, $PQ = p'$, $BC = a$, $ACQ = C$, $PCQ = \gamma$, $AQ = \delta$; l'equazione cardinale adattata a'due triangoli ACB, BPC sotto le condizioni stabilite darà

$a = 2c.\cos C = 2b\cos\gamma$; epperò $c^2(1 - \text{sen}^2 C) = b^2(1 - \text{sen}^2\gamma)$; cioè

$$c^2 - c^2\,\text{sen}^2 C = b^2 - b^2\,\text{sen}^2\gamma \ldots (4)$$

Il primo membro di questa equazione del tutto simile al secondo ci dice che il triangolo ACQ è rettangolo in Q, come lo è PCQ anche in Q. Infatti, essendo $\text{sen}\gamma = \frac{p'}{b}$ (pag. 48 (3) e (4)), l'equazione (4) diverrà

$c^2 - b^2 + p'^2 = c^2\,\text{sen}^2 C$; ossia $p^2 + p'^2 = \delta^2 = c^2\,\text{sen}^2 C$; ossia
$$AQ = AC\,\text{sen}\,ACQ,$$

equazione simile alla (3 e 4 pag. 48); per cui sarà $AQC = 90°$. Sicchè *se una retta è perpendicolare ad un piano, e dal piede*

di questa si tira una perpendicolare ad un'altra retta presa nello stesso piano, unendo un punto qualunque della perpendicolare al piano col piede di quest'ultima, la congiungente predetta sarà anche perpendicolare alla retta presa nel piano.

64. *Superficie de' volumi considerati nella geometria solida.* Secondo la definizione del prisma (pag. 9) la sua superficie laterale è la somma de' parallelogrammi che limitano il suo volume: e la superficie intera si ha unendo alla predetta somma i due poligoni che formano le sue basi. Epperò se a è l'altezza del prisma retto, ed $m, n, p, q, s\ldots$ sono i lati del poligono, si avrà

Sup. convessa del prisma retto $=a(m+n+p+q+s\ldots)$
Sup. intera del pr. retto $=a(m+n+p+q+s\ldots)+2km^2$ (p. 107)

in cui k è noto quando è noto il poligono della base.

Quindi se m, n sono i lati della base di un parallelepipedo, e a è l'altezza, sarà

Sup. convessa del parallelep. $=2a(m+n)$, e
Superficie intera $=2a(m+n)+2km^2$ (pag. 107).

Se a è il lato del cubo, sarà

Sup. convessa del cubo $=4a^2$; e Sup. intera $=6a^2$.

65. Siano $a, b, c, e, g\ldots$ i lati della base di una piramide retta ed a' l'apotema comune di essa; sarà

Sup. convessa della piram. retta $=\frac{a'}{2}(a+b+c+e+g\ldots)$

Sup. int. della pir. retta $=\frac{a'}{2}(a+b+c+e+g\ldots)+ka^2$ (p. 107).

66. Abbiamo veduto (n.° 11 pag. 10 e 11) che tanto il cilindro retto che il cono retto sono de' solidi di rivoluzione. Sicchè se nel rettangolo generatore del primo, e nel triangolo rettangolo che genera il secondo si tiri a piacere una retta parallela al lato orizzontale, questa nella rivoluzione delle generatrici genererà un cerchio, il cui centro è il punto d'incontro della predetta parallela

coll'asse. Adunque *la sezione del cilindro e del cono retto con un piano parallelo alla base sarà un cerchio.*

67. La superficie del cilindro retto può svilupparsi in un rettangolo i cui elementi sono, la circonferenza del cerchio che forma la base del cilindro, e l'altezza o il lato di questo. Epperò, chiamando a il lato del cilindro retto e r il raggio della base, sarà

$$\text{Sup. convessa del cilindro retto} = 2r\pi a;$$
$$\text{Sup. intera} = 2r\pi a + 2\pi r^2 = 2r\pi(a+r).$$

(*) La superficie laterale di un cilindro obbliquo è eguale al lato generatore di esso moltiplicato pel perimetro della sezione perpendicolare al lato medesimo, la quale è una curva che da'geometri chiamasi *ellisse*, e è superiore a'mezzi della geometria piana.

68. Se nella base di un cono retto s'intenda iscritto un poligono regolare di un numero indefinito di lati, presso al suo limite potrà sostituirsi il cerchio al poligono predetto, la circonferenza al perimetro, e il cono alla piramide poligona iscritta in essa quando si unisce il vertice del cono con tutti gli angoli del poligono regolare iscritto nella base di esso; epperò chiamando a il lato del cono ed r il raggio della sua base, sarà

$$\text{Sup. conica convessa} = 2r\pi\frac{a}{2} = \pi ar;$$

$$\text{Sup. intera} = \pi ar + \pi r^2 + \pi r(a+r).$$

69. (Fig. 52). Si tagli un cono retto $BADH$ con un piano psq parallelo alla base, la sezione psq sarà un cerchio (66); epperò il solido $pAsq$ sarà anche un cono retto (62): sicchè il tronco conico $BHDqsp$ sarà la differenza di due coni $BADH$, $pAqs$; epperò la superficie del detto tronco conico sarà la differenza della superficie de' due coni BAD, pAq. Facciamo perciò $CD = R$, $nq = r$, $AD = \lambda$, $Aq = x$, $qD = l$ sarà

$$\text{Sup. convessa del tronco conico} = \pi R\lambda - \pi rx \ldots (1);$$

ma è $x = \frac{\lambda r}{R}$, onde $l = \lambda - x = \lambda - \frac{\lambda r}{R} = \frac{\lambda}{R}(R-r) \ldots (2)$:

sostituendo in (1) il valore di x, e poi l per $\frac{\lambda}{R}(R-r)$, sarà

$$\text{Sup. conv. del tronco conico} = \pi(R\lambda - rx) = \frac{\pi\lambda}{R}(R^2 - r^2)$$

$$= \frac{\pi\lambda}{R}(R+r)(R-r) = \pi(R+r)l = \pi(CD+nq)qD.$$

Adunque *la superficie convessa di un tronco conico è eguale al rettangolo della semisomma delle due circonferenze superiore od inferiore pel lato del tronco.*

Se m indica la media aritmetica fra R e r, sarà

$$2\pi m = \pi(R+r): \text{ epperò}$$

$$\text{Sup. convessa del tronco conico} = l(R+r) = 2\pi ml; \text{ e}$$
$$\text{Sup. intera } 2\pi ml + \pi R^2 + \pi r^2 = \pi(2ml + R^2 + r^2)$$

È facile il vedere che la circonferenza media aritmeticamente fra quelle delle basi del tronco conico ossia la $2\pi m$ è la circonferenza del cerchio che passa per la metà h di qD (Fig. 53): poichè, se ih rappresenta m, ossia il raggio medio aritmeticamente fra CD, nq, supponendo che hg sia perpendicolare a CD, e qg' ad ih, sarà $gD = R - m$; $g'h = m - r = gD$; ed essendo pure l'angolo $hDg = qhg'$, saranno eguali i triangoli rettangoli hDg, qhg', epperò $qh = hD$.

70. La sfera può concepirsi generata da un semicerchio che gira intorno ad un diametro qualunque con perfetta rivoluzione. Supponiamo (Fig. 54) che il semicerchio ACA' giri intorno al diametro AA', ogni semiordinata qualunque Bm descriverà un cerchio che crescerà o diminuirà come più la medesima si avvicinerà o si allontanerà dal centro F; e il centro di questo cerchio sarà il punto m d'incontro della predetta semiordinata col diametro ch'è l'asse di rivoluzione. Adunque *la sezione di un piano con una sfera è un cerchio, il quale sarà cerchio massimo se il piano segante passa per lo centro della sfera e sarà cerchio minore se passerà per ogni altro punto preso nell'asse della medesima.*

Adunque i centri di tutt'i cerchi minori paralleli ad un cerchio

massimo saranno allogati nel diametro della sfera perpendicolare al detto cerchio massimo: e i punti estremi di questo diametro saranno i poli (pag. 10) di tutti questi cerchi paralleli. Sicchè la distanza del polo dal cerchio massimo è un quadrante, e qualunque punto della circonferenza di un cerchio minore dista da un suo polo per un arco costante.

Conoscendosi la perpendicolare $Fm=a$ abbassata dal centro della sfera a quello di un cerchio minore il cui raggio è $mB'=r$, essendo R il raggio della sfera, sarà $r=\sqrt{R^2-a^2}$, onde $a=\sqrt{R^2-r^2}$ darà la distanza a di un cerchio minore del centro della sfera, quando si conosce il raggio di entrambi.

Un arco AB del cerchio che genera una sfera, genererà nella rivoluzione intorno all'asse AA' una *zona sferica* (pag. 10) la cui base unica sarà il cerchio di mB, e la cui altezza sarà Am. E l'arco BC genererà una zona a doppia base, una cioè il cerchio di CD, e l'altra il cerchio Bm; e l'altezza di questa zona mD distanza delle due predette basi.

Dalla generazione dalla sfera segne che i cerchi massimi si segheranno tutti in un diametro: epperò se si prolungano due archi di cerchi massimi presi a piacere sulla superficie sferica, finchè s'incontrano dall'una e dall'altra parte, gli archi intercetti fra' due punti d'incontro saranno semicirconferenze.

71. (Fig. 54). Siano AB, BC due lati di un poligono regolare iscritto nel cerchio il cui raggio sia R: si tirino Bm, CD perpendicolari al diametro AA', e gli apotemi Fn, Fp de' medesimi lati, e da p si tiri pE perpendicolare al diametro AA'. Se supponiamo che il semicerchio ACA', girando intorno ad AA', descriva una sfera, e se il poligono iscritto si supponga presso al suo limite (p. 135 riga 16), il lato AB descriverà una superficie conica a cui potrà sostituirsi la superficie dalla zona sferica generata dall'arco AB; il lato BC descriverà la superficie di un tronco conico a cui potrà sostituirsi la superficie della zona a doppia base, generata dall'arco BC. Ciò posto la superficie del cono generato dalla corda AB è eguale a $2\pi Bm.An$ (68), (essendo $An=\frac{AB}{2}$ p. 19 n.° 21); ma poichè è $An : Am = Fn : Bm = 2\pi Fn : 2\pi Bm$ (per la si-

miglianza de' triangoli ABm, FnA, p. 36 n.° 45), sarà $2\pi Bm$ in $An = 2\pi Fn$ in Am; e poichè presso al limite la corda è rimpiazzata dall'arco, e l'apotema dal raggio del cerchio (p. 134 e 135, n.° 60); perciò, facendo $Am = a$, avremo

Zona generata dall'arco $AB = 2\pi Bm$ in $An = 2\pi FA.Am = 2R\pi a$...(1)

Parimente la superficie del cono tronco generato dalla corda BC sarà $BC.2\pi pE$ (n.° prec.); ma pe' triangoli simili CBh, FpE è $BC : Bh = Fp : pE = 2\pi Fp : 2\pi pE$; sicchè sarà BC in $2\pi pE = Bh$ in $2\pi Fp = mD$ in $2\pi Fp$. Presso al limite il precedente prodotto diviene, dopo di aver fatto $mD = a'$

Zona generata dell'arco $BC = 2R\pi a'$... (2)

Il lato CH parallelo al diametro descriverà una superficie cilindrica $2\pi FI$ in DQ a cui, fatto $DQ = a''$ presso al limite, si sostituirà la zona generata dall'arco $CH = 2mR.a''$... (3)

Continuando nello stesso modo e sommando l'equazioni (1), (2) e (3)... si avrà

Superficie sferica $= 2\pi R(a + a' + a''\ldots) = 2\pi R.2R = 4\pi R^2$.

Adunque 1° *la superficie della sfera è quadrupla del cerchio massimo*; 2° *la superficie di una zona qualunque* (data dall'equazione (1) e (2)) *è eguale alla circonferenza del cerchio massimo moltiplicata per la sua altezza.*

Segue da ciò che dato il raggio $mB' = r$ del cerchio che fa di base alla zona generata da AB', può trovarsi subito la sua altezza $Am = a$, facendo $Fm = \sqrt{R^2 - r^2}$; $a = R - Fm$.

E se si conosce l'altezza $Am = a$ di una zona, si determinerà subito il raggio della base, cioè $mB' = r$, facendo $Fm = R - a$;

$$r = \sqrt{R^2 - (R-a)^2} = \sqrt{2aR - a^2}.$$

Parimente se si conoscono i raggi $mB' = r$, $DC = r'$ delle due basi della zona a doppia base, si determinerà facilmente la sua altezza $mD = a$ facendo

$$Fm = \sqrt{R^2 - r^2},\ FD = \sqrt{R^2 - r'^2};\ a = Fm - FD.$$

E conoscendosi $Am=a$, $AD=a'$, si determineranno facilmente i raggi $DC'=r'$, $mB'=r$ facendosi

$$r=mB^2=\sqrt{2aR-a^2};\ r'=DC'=\sqrt{2a'R-a'^2}.$$

Siano due sfere i cui raggi sono r, r', e siano S, S' le superficie sferiche relative, sarà $S : S'=4\pi r^2 : 4\pi r'^2=r^2 : r'^2$. Cioè *le superficie sferiche sono come i quadrati de' raggi.*

L'espressione della superficie sferica per mezzo del diametro D è $S=\pi D^2$.

72. (Fig. 54). Se vogliamo paragonare la superficie $AA'C'B'A$ di un fuso sferico a quello della sfera, egli è chiaro che se siavi un fuso elementare σ ossia l'unità elementare di fuso sferico, il cui angolo φ rappresenti l'elemento angolare, l'arco φ misurerà questo angolo a 90° dal suo vertice (12 pag. 162). Supponiamo sulle prime commensurabile il fuso F e la superficie sferica P; e sia $F=m\sigma$; $P=n\sigma$; sarà l'arco A che misura l'angolo del fuso F eguale a $m\varphi$, e la circonferenza $=n\varphi$: onde sarà

1.° $F : P=m\sigma : n\sigma=m : n$; 2.° $A : 360=m\varphi : n\varphi=m : n$;
onde $F : P=A : 360\ldots$ (1)

Se il fuso e la superficie sferica fossero incommensurabili sia

$F : P=m\sigma : n\sigma+h$; $A : 360=m\varphi : n\varphi+g$; sarà

$Fn\sigma+Fh=mP\sigma$; $An\varphi+Ag=m\varphi.360\ldots$ (2):

ma h, g sono evanescenti al loro limite, cioè quando φ e σ si considerano infinitamente piccoli; adunque l'equazioni (2) diverranno $Fn\sigma=mP\sigma$; $An\varphi=m\varphi.360$, le quali daranno

$F : P=m : n$; $A : 360=m : n$; epperò $F : P=A : 360$.

Adunque *un fuso è alla superficie sferica come l'angolo del fuso è a* 360°.

73. Sappiamo che la superficie sferica comprende otto triangoli trirettangoli (n.i 12 e 47) ossia 4 cerchi massimi (71): sostituendo 4 cerchi massimi per P nella proporzione $F : P=A : 360°$, si avrà

$$F=\text{un cerchio massimo}.\frac{A}{90}=\pi r^2\frac{A}{90}\ldots (2).$$

E si sostituisce $2r\pi$ a 360, e πr^2 al cerchio massimo, sarà

$$F=\frac{4\pi r^2}{2r\pi}.A=2rA\ldots (3).$$

La formola (2) ci dice *che un fuso sferico è eguale a tanti cerchi massimi quanto dinota il coefficiente* $\frac{A}{90}$: la formola (3) dice *che un fuso è eguale a tante unità quadrate quanto è il prodotto delle unità lineari contenute in* $2r$ *per le unità lineari dell' angolo* A *rettificato col raggio* r (166 pag. 138).

L'equazioni (2) e (3) ci dicono *che due fusi appartenenti alla stessa sfera sono fra loro come gli angoli che comprendono*; e l'equazione (3) ci dice *che due fusi appartenenti a diverse sfere sono fra loro nella ragion composta de' raggi e degli angoli. E se hanno lo stesso angolo sono come i raggi ossia come le circonferenze de' cerchi massimi delle sfere* (n.° 163 pag. 137).

74. La superficie convessa del cilindro circoscritto colla sfera è $2r\pi.2r=4\pi r^2=$ alla superficie sferica. La superficie intera sarà $6\pi r^2$: onde sup. int. del cilindro circoscritto: sup. sferica $=3:2$.

75. (Fig. 54). Circoscrivasi al cerchio generatore della superficie sferica il triangolo equilatero, e chiamisi a il lato del medesimo; sarà $a=L'L=2r\sqrt{3}$ (pag. 177) in cui r è il raggio del cerchio. Quando il cerchio ha generato la sfera, la $A'L=a$ ha generato la base del cono equilatero circoscritto alla sfera: questo cono avrà dunque per raggio della base $r\sqrt{3}$, e per lato $2r\sqrt{3}$: epperò la sua superficie convessa sarà (68) $2r\pi\sqrt{3}.r\sqrt{3}=6\pi r^2$, e l'intera sarà $6\pi r^2+3\pi r^2=9\pi r^2$. Adunque la superficie convessa del cono equilatero circoscritto alla sfera è alla superficie sferica come 3 a 2, ossia (74) come la superficie intera del cilindro circoscritto è alla superficie sferica. E la superficie intera del cono equilatero circoscritto alla sfera è alla superficie sferica o alla superficie convessa del cilindro circoscritto alla sfera come 9 a 4.

76. (Fig. 55). Sia ABC un triangolo sferico, e s'intendano prolungati, il lato AB in modo che formi il cerchio $ABA'B'$, e i lati AC, BC in guisache vadano ad incontrarsi in C', facendo il

fuso $CB'C'A'C$; sarà $ACA'=CA'C'=180°$ (70 § ultimo); $B'CB'=CB'C'=180°$; epperò $AC=A'C'$, $BC=B'C'$; ma e pure $C=C'$; adunque sarà $ACB=A'C'B'$ (31); epperò

$$ACB+A'CB'=A'CB'+A'C'B'=CB'C'A'C$$

cioè *due triangoli sferici costruiti su di un emisfero e che hanno un angolo opposto al vertice sono eguali al fuso che comprende lo stesso angolo.*

77. Consideriamo (Fig. 55) nell'emisfero $ABA'B'C$ un triangolo sferico ACB; sarà $BB'=180$ (70), $BAB'=180$, $ABA=180$. La superficie dell'emisfero è eguale a

$$ACB+B'CA'+AB'C+BA'C; \text{ epperò sarà}$$

$$\text{Sup. dell'emisfero } +2ABC=ACB+B'CA'+\text{ fuso } B'ABB' +\text{ fuso } A'ABA';$$

cioè chiamando ts la superficie del triangolo sferico, e sapendosi che $ACB+A'CB'=$ fuso il cui angolo è C (prec.); sarà (equazione (2) n.° 72)

$$2\pi r^2+2ts=\text{fuso di } A+\text{fuso di } B+\text{fuso di } C\ldots (4)$$

$$=\pi r^2\frac{A}{90}+\pi r^2\frac{B}{90}+\pi r^2\frac{C}{90}; \text{ cioè}$$

$$ts=\frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{A+B+C-180}{90}\right)\ldots (5).$$

E sostituendo nell'equazione (4) il valore del fuso preso da (3) n.° 73; avremo

$$ts=r(A+B+C-r\pi)\ldots (6);$$

della quale formola si farà uso o rettificando A, B, C col raggio r, e moltiplicando r per la differenza indicata dal suo coefficiente; o riducendo $r\pi$ a $180°$, e rettificando col raggio r la differenza $A+B+C-180$, e finalmente moltiplicando questa differenza per r.

78. (Fig. 56). L'aja di un poligono sferico $ABCDE$ può aversi facilmente risolvendolo in triangoli sferici. Infatti se adatteremo per l'aja del triangolo sferico la formola (5) (precedente) cioè $t.s=\frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{A+B+C-180}{90}\right)$; dando agli angoli de' triangoli ne' quali il poligono predetto si risolve, le denominazioni delle lettere che veggonsi nella figura, sarà

$$t=\frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{B+\varphi+\theta-180}{90}\right),\ t'=\frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{\varphi'+\theta'+\delta-180}{90}\right);$$

$$t''=\frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{E+\varphi''+\delta'-180}{90}\right);\ \text{cioè}$$

$$\text{Poligono sferico}=\frac{\pi r^2}{2}[A+B+C+D+E\ldots-(n-2)180]\ldots(7).$$

Servendoci poi della formola (6) (77) del triangolo sferico, cioè di $t.s=r(A+B+C-r\pi)$, avremo

$$\text{Poligono sferico}=r[A+B+C+D+E\ldots-(n-2)r\pi]\ldots\ (8).$$

(*) 79. Passiamo a sporre le celebri formole della superficie del triangolo sferico, conosciute dagli analisti. A tal oggetto facciamo nella formola (5) (77) $90^\circ=1$ (unità angolare), e $\frac{\pi r^2}{2}=1$ (unità di superficie) essa diverrà $t.s=A+B+C-2\ldots$ (5). Questa formola indica l'eccesso degli angoli di un triangolo sferico sopra due retti, quantità conosciuta sotto il nome di *eccesso sferico*. Questa stessa formola appartiene al triangolo sferico: ma in questo caso ha bisogno di una interpetrazione; cioè sia $A+B+C=180^\circ+m''=2+m''$ (indicando l'eccesso sferico con m''), sarà $t.s=A+B+C-2=m''$, e poichè l'unità angolare è $90^\circ=324000''$, e l'unità di superficie è il semicerchio; perciò la formola $t.s=m''$, ripristinata darà $t.s=\frac{\pi r^2}{2}\frac{m}{324000}$.

Nello stesso modo la formola (7) del poligono sferico potrà porsi sotto la forma

$$P=A+B+C\ldots-2(n-2)=2(n-2)+p'-2(n-2)=p'';$$

onde ripristinata sarà

$$P=\frac{\pi r^2}{2}\,\frac{p}{324000}.$$

80. Chiamisi σ la superficie del triangolo sferico e α, β, γ i suoi angoli, la formola (5) (prec.) cioè $t.s=A+B+C-2$ diverrà

$$\frac{\sigma}{2}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-1=-\left(1-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right):$$ epperò sarà

$$\cot\frac{\sigma}{2}=-\cot\left(1-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)=-\tang\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

$$=-\tang\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=-\frac{\tang\frac{\alpha}{2}+\tang\frac{\beta+\gamma}{2}}{1-\tang\frac{\alpha}{2}\tang\frac{\beta+\gamma}{2}}$$ (pag. 71):

or per le analogie di Nepero è (55 formola A)

$$\tang\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}}\cot\frac{\alpha}{2};$$

sostituendo nella predetta equazione, sarà

$$\cot\frac{\sigma}{2}=-\frac{\tang\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b+c}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}-\cos\frac{b-c}{2}}$$

$$=-\frac{\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\cos\frac{b+c}{2}+\frac{1+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}-\cos\frac{b-c}{2}}\quad(70)$$

$$=-\frac{\cos\frac{b+c}{2}+\cos\frac{b-c}{2}+\cos\alpha\left(\cos\frac{b-c}{2}-\cos\frac{b+c}{2}\right)}{\operatorname{sen}\alpha\left(\cos\frac{b+c}{2}-\cos\frac{b-c}{2}\right)}$$

$$=\frac{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}+\cos\alpha\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}=\frac{\cot\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2}+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\ldots\ldots(1).$$

Questa formola dà la superficie del triangolo sferico per mezzo di due lati del medesimo e dell'angolo da esso compreso.

81. Se vogliamo la stessa superficie per mezzo de' lati del triangolo sferico, riduciamo la formola (1) per mezzo del valore di $\cos\alpha=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}$ (I. n.° 5); avremo

$$\cot\frac{\sigma}{2}=\frac{\cot\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2}+\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$=\frac{\frac{1+\cos b}{\operatorname{sen}b}\cdot\frac{1+\cos c}{\operatorname{sen}c}+\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}\ (h);$$

ma abbiamo dalla formola (1 n.° 80) $\cos\alpha=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}$;

epperò

$$\operatorname{sen}^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\frac{\operatorname{sen}^2b\operatorname{sen}^2c-(\cos a-\cos b\cos c)^2}{\operatorname{sen}^2b\operatorname{sen}^2c}$$

$$=\frac{(\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c+\cos a-\cos b\cos c)(\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c-\cos a+\cos b\cos c)}{\operatorname{sen}^2b\operatorname{sen}^2c}$$

$$=\frac{(\cos a-\cos(b+c))(\cos(b-c)-\cos a)}{\operatorname{sen}^2b\operatorname{sen}^2c}$$

$$=\frac{2\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}\cdot 2\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2}\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}}{\operatorname{sen}^2b\operatorname{sen}^2c};$$

da cui si ha

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2}\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}}}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c};$$

sostituendo in (h) sarà

$$\cot\frac{\sigma}{2} = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{2\sqrt{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2}\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}}}\ldots(2);$$

formola che dà la superficie di un triangolo sferico in funzione de' lati. Ma si può pervenire ad una formola monomia per l'uso de' logaritmi ed ecco come. Si elevi a quadrato la formola (1) n.° 80, cioè $\cot.\frac{\sigma}{2} = \frac{\cot\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2}+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$; si avrà

$$\cot^2.\frac{\sigma}{2} = \frac{\cot^2\frac{b}{2}\cot^2\frac{c}{2}+2\cot\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2}\cos\alpha+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}^2\alpha};$$

epperò, aggiungendo 1 d' ambe le parti e sostituendo 1 a $\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha$, sarà

$$1+\cot^2.\frac{\sigma}{2} = \frac{\cot^2\frac{b}{2}\cot^2\frac{c}{2}+2\cot\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2}\cos\alpha+1}{\operatorname{sen}^2\alpha};$$

ma è

$$1+\cot^2\frac{\sigma}{2} = 1+\frac{\cos^2\frac{\sigma}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{\sigma}{2}} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{\sigma}{2}}:$$

sicchè sarà

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2.\frac{\sigma}{2}} = \frac{\cot^2\frac{b}{2}\cot^2\frac{c}{2}+2\cot\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2}\cos\alpha+1}{\operatorname{sen}^2\alpha}\ldots(M).$$

Esaminiamo a parte a parte i termini che formano il numeratore del secondo membro; avremo

$$\cot^2\frac{b}{2}\cot^2\frac{c}{2}=\frac{\cos^2\frac{b}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{b}{2}}\cdot\frac{\cos^2\frac{c}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{c}{2}}=\frac{1-\operatorname{sen}^2\frac{b}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{b}{2}}\cdot\frac{1-\operatorname{sen}^2\frac{c}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{c}{2}}$$

$$=\frac{1-\operatorname{sen}^2\frac{b}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{c}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{b}{2}\operatorname{sen}^2\frac{c}{2}}+1:$$

epperò sarà

$$\cot^2\frac{b}{2}\cot^2\frac{c}{2}+1=\frac{1-\operatorname{sen}^2\frac{b}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{c}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{b}{2}\operatorname{sen}^2\frac{c}{2}}+2\ldots\ (m).$$

Parimente abbiamo

$$2\cot\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2}\cos\alpha=\frac{2\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}(\cos a-\cos b\cos c)}{\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}\,.\,\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}$$

$$=\frac{2\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}(\cos a-\cos b\cos c)}{\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}\,.\,2\operatorname{sen}\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}\,.\,2\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{2\operatorname{sen}^2\frac{b}{2}\operatorname{sen}^2\frac{c}{2}}$$

$$=\frac{1-2\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}-\left(1-2\operatorname{sen}^2\frac{b}{2}\right)\left(1-2\operatorname{sen}^2\frac{c}{2}\right)}{2\operatorname{sen}^2\frac{b}{2}\operatorname{sen}^2\frac{c}{2}}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}^2\frac{b}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{c}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{b}{2}\operatorname{sen}^2\frac{c}{2}}-2\ldots\ (k):$$

sostituendo ora nel numeratore dell'equazione (M) i valori di (m) e (k) rispettivamente in luogo di $\cot^2\frac{b}{2}\cot^2\frac{c}{2}+1$ e di $2\cot\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2}\cos\alpha$, l'equazione ($M$) si trasformerà nell'altra

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{\sigma}{2}}=\frac{1-\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{b}{2}\operatorname{sen}^2\frac{c}{2}\operatorname{sen}^2\alpha},\text{ da cui si avrà}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}\operatorname{sen}\alpha}{\cos\frac{a}{2}}=$$

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\cdot\frac{2\sqrt{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2}\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}}}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\cdot\frac{2\sqrt{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2}\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}}}{2\operatorname{sen}\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}\cdot 2\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}};$$

cioè

$$\operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}=\frac{\sqrt{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2}\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}\ldots(3)$$

ch'è la formola monomia richiesta.

Si moltiplichino membro a membro le due equazioni (2 p. 209) e (3) si avrà

$$\cos\frac{\sigma}{2}=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}\ldots(4);$$

altra formola semplicissima, comechè non monomia epperò non atta all'applicazione de' logaritmi, la quale dà la superficie del triangolo sferico per mezzo de'suoi lati.

82. Ma di tutte le formole, la più elegante la più semplice e nel tempo stesso atta al calcolo logaritmico è la formola monomia data dal Lhuillier; a cui ecco come si può pervenire. Sostituendo nella formola (4) (prec.) $2\cos^2\frac{a}{2}-1$ a $\cos a$, $2\cos^2\frac{b}{2}-1$ a $\cos b$, $2\cos^2\frac{c}{2}$ a $\cos c$, avremo riducendo

$$\cos\frac{\sigma}{2}=\frac{\cos^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{b}{2}+\cos^2\frac{c}{2}-1}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}};$$

epperò sarà

$$1-\cos\frac{\sigma}{2}=\frac{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}-\cos^2\frac{a}{2}-\cos^2\frac{b}{2}-\cos^2\frac{c}{2}+1}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}:$$

dividendo membro a membro questa equazione per l'altra (3) (prec.), sarà

$$\frac{1-\cos\frac{\sigma}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}}=$$

$$\operatorname{tang}\frac{\sigma}{4}=\frac{1+2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}-\cos^2\frac{a}{2}-\cos^2\frac{b}{2}-\cos^2\frac{c}{2}}{\sqrt{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2}\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}}}$$

$$=\frac{1-\cos^2\frac{a}{2}-\cos^2\frac{b}{2}+\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}-\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}+2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}-\cos^2\frac{c}{2}}{\sqrt{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2}\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}}}$$

$$=\frac{\left(1-\cos^2\frac{a}{2}\right)\left(1-\cos^2\frac{b}{2}\right)-\left(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}-\cos\frac{c}{2}\right)^2}{\sqrt{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}\cos\frac{a+c-b}{2}\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}}}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}\operatorname{sen}^2\frac{b}{2}-\left(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}-\cos\frac{c}{2}\right)^2}{\sqrt{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2}\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}}}$$

$$=\frac{\left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}+\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}-\cos\frac{c}{2}\right)\left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}-\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\cos\frac{c}{2}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2}\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}}}$$

$$=\frac{\left[\cos\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)-\cos\frac{c}{2}\right]\left[\cos\frac{c}{2}-\cos\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)\right]}{\sqrt{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2}\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}}}$$

$$=\frac{2\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{4}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{4}\,.\,2\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{4}\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{4}}{\sqrt{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2}\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}}}$$

$$=\frac{4\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{4}}{\sqrt{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}}}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{4}}{\sqrt{\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}}}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{4}}{\sqrt{\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2}}}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{4}}{\sqrt{\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}}}.\quad(N)$$

Facciasi $\frac{a+b+c}{2}=\varphi$; sarà $\frac{a+b+c}{4}=\frac{\varphi}{2}$; epperò

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{4}}{\sqrt{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\operatorname{sen}\varphi}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}{2\cos\frac{\varphi}{2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{a+b+c}{4}};$$

facendo lo stesso per le altre espressioni simili, l'equazione (N) diverrà

$$\operatorname{tang}\frac{\sigma}{4}=\sqrt{\operatorname{tang}\frac{a+b+c}{4}\operatorname{tang}\frac{b+c-a}{4}\operatorname{tang}\frac{a+c-b}{4}\operatorname{tang}\frac{a+b-c}{4}}\ldots(5)$$

ch'è la formola del Lhuiller.

83. Lagrangia ha dedotta dalla superficie del triangolo sferico $\alpha+\beta+\gamma-2$ quella di un quadrilatero sferico, utilissima a determinare i quadrilateri sferici terrestri, quando si conoscono le latitudini e le longitudini de' quattro vertici di esso.

Ecco ad un di presso la sua stessa dimostrazione. Abbiamo $\sigma=\alpha+\beta+\gamma-2$. Suppongasi (Fig. 57) che il vertice α di questo triangolo cada sul polo terrestre, ed EQ sia l'equatore. Siano a, b, c i lati opposti rispettivamente agli angoli α, β, γ: s'intendano prolungati i lati b, c finchè divengano quadranti, si avrà allora un triangolo isoscele $M\alpha N$; in cui sarà $\alpha M=90^\circ=1$, $\alpha N=1$; $\alpha MN=1$, $\alpha NM=1$, $MN=\alpha$ (12 p. 162): chiamando S la superficie di questo triangolo sferico, sarà $S=2+\alpha-2=\alpha$: epperò

sarà $S-\sigma=2-(\beta+\gamma)$; cioè $\frac{\beta MN\gamma}{2}=1-\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$; quindi

$$\operatorname{tang}\frac{\beta MN\gamma}{2}=\cot\frac{\beta+\gamma}{2}=\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{b-c}{2}}\ldots(4)\ (\text{pag. } 191(A)).$$

Chiaminsi m, n rispettivamente i lati βM, γN del quadrilatero $\beta MN\gamma$, sarà $b=1-n$, $c=1-m$, epperò $\frac{b+c}{2}=1-\frac{m+n}{2}$; e $\frac{b-c}{2}=\frac{m-n}{2}$. Sostituendo questi valori in (4) si avrà

$$\text{tang}\,\frac{\beta MN\gamma}{2}=\frac{\text{sen}\,\frac{m+n}{2}}{\cos\frac{m-n}{2}}\,\text{tang}\,\frac{\alpha}{2}.$$

Similmente se facciamo $DM=m'$, $CN=n'$, sarà

$$\text{tang}\,\frac{DMNC}{2}=\frac{\text{sen}\left(\frac{m'+n'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{m'-n'}{2}\right)}\,\text{tang}\,\frac{\alpha}{2};$$

le quantità m, n, m', n' sono le latitudini respettive de' vertici β, γ, D, C; ed α è la differenza delle longitudini di β, γ; come pure di D, C: sicchè, determinati i due quadrilateri $\beta MN\gamma$ $DMNC$, la loro differenza darà il quadrilatero $\beta DC\gamma$. Ma ciò suppone che il meridiano di β sia identico a quello di D, e quello di γ a quello di C.

84. *Volumi de' corpi considerati nella geometria solida.* Supponiamo elevata, dal vertice dell'angolo di un poligono una perpendicolare sul piano di esso; e poi supponiamo che questo piano si muove parallelamente a se stesso, scorrendo lungo la detta perpendicolare a cui si appoggia col predetto angolo, e che finalmente si arresti ad un qualunque punto della medesima, si concepirà così facilmente la generazione del prisma retto a base qualunque. E se la detta perpendicolare s'inclini al piano del poligono a piacere, e questo piano s'immagini muoversi parallelamente a se stesso in modo che il vertice dell'angolo su cui cade la predetta obbliqua resti sempre sull'obbliqua medesima, il detto piano descriverà così un prisma obbliquo a base qualunque.

Segue dalla cennata generazione del prisma ch'esso è pienamente determinato dalla sua base e dalla sua altezza. Epperò di-

remo che un prisma è *funzione della base e dell'altezza.* Chiamiamo P il primo, b la base ed a l'altezza, dovrà aver luogo una di queste equazioni

$$P=fa+fb\ldots(1);\ P=\frac{fa}{fb}\text{ o }P=\frac{fb}{fa}\ldots(2);\ P=fafb\ldots(3)\ (a).$$

La prima espressione è contradetta dal principio degli omogenei; poichè, dovendo reggere la funzione per qualunque valore di a e di b, facendo $a=0$, sarà $P=fb$, e fatto $b=0$, sarà $P=fa$, amendue assurdi, perchè nel primo caso il prisma che ha tre dimensioni sarebbe funzione di due dimensioni, e nel secondo caso di una. La forma $P=\frac{fa}{fb}$ o $P=\frac{fb}{fa}$ è parimente in opposizione al principio degli omogenei, e d'altronde fatto a o $b=0$ sarebbe $P=0$ o pure $P=\infty$. Adunque la forma conveniente alla funzione che dee rappresentare il prisma è $P=fafb$.

Per determinare questa funzione osserviamo che essa dà $fa=\frac{P}{fb}$; $fb=\frac{P}{fc}$: la prima ci dice che fa è di una sola dimensione, perchè P è di tre e fb di due: la seconda dice che fb è di due dimensioni: sicchè potremo fare $fa=ma$, $fb=nb$ in cui m, n sono numeri; ed allora avremo $P=fafb=ma.nb$, ma nella formazione del prisma, l'a e la b entrano ciascheduna una sola volta; adunque sarà $m=1$, $n=1$; epperò $P=ab$. Cioè *il volume di un prisma è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.*

Questa enunciazione è inesatta poichè il prodotto di una retta per una superficie è un'espressione che non ha alcuna significazione. Per raddrizzarla supponiamo che siavi un altro parallelepipedo P' la cui base sia b' e a' l'altezza, e che sia $a=ma'$, $b=nb'$ (*b*); sarà $P'=a'b'$; epperò

$$P:P'=b.a=b'.a'=ma'.nb':b'.a'=m.n:1=\frac{a}{a'}\cdot\frac{b}{b'}:1:$$

(*a*) Vedi la nota (*a*) pag. 102.

(*b*) Il caso di a, b incommensurabile con a', b' è compreso in questo ragionamento, come può osservarsi pag. 100 n.° 47 2.ª parte.

questa proporzione da $P=P'.\frac{a}{a'}.\frac{b}{b'}.....$ (1). Se noi facciamo $a'=1$ (unità lineare), $b'=1^2$ (unità quadrata), sarà $P'=$ all'unità cubica che chiameremo c^3, ed in tal caso la relazione (1) darà $P=c^3.\frac{a}{1}.\frac{b}{1^2}=c^3.ab$. Cioè *il prisma è eguale a tante unità cubiche quanto è il prodotto delle unità lineari che contiene la sua altezza per le unità quadrate che si contengono nella sua base.*

Sicchè un prisma obbliquo può trasformarsi in un prisma retto equivalente che abbia la stessa base e altezza.

85. Quindi se due prismi P, P' hanno per rispettive basi e altezze $b, a; b', a'$; sarà $P : P'=b.a : b'.a'$; e se le basi sono eguali sarà $P : P'=a : a'$, e se eguali sono le altezze sarà $P : P'=b : b'$. Adunque *le unità cubiche che sono in due prismi sono fra loro come i rispettivi prodotti delle unità quadrate delle loro basi per le unità lineari delle loro altezze: e se hanno le stesse basi saranno fra loro come le unità lineari delle loro altezze, e se hanno la stess'altezza saranno fra loro come le unità quadrate delle loro basi.*

86. Siano $c, g, f, h, p...$ i lati della base b di un prisma, e a l'altezza del medesimo; sarà $b=mc^2$ (pag. 107). Supponiamo noto il rapporto $\frac{a}{c}$, che chiameremo n, avremo $a=nc$, epperò $P=ab=nc.mc^2=mnc^3=pc^3$; e poichè quando è dato il prisma è dato m, n epperò p: adunque *ogni prisma potrà esser rappresentato dal cubo di uno de' suoi lati moltiplicato per un coefficiente costante.*

87. Siano due prismi P, P'; e i lati delle loro rispettive basi b, b' siano $c, g, e, f, h..., c', g'...$ e fra le loro rispettive altezze e fra i lati delle basi siavi il rapporto $a : a'=c : c'=g : g'...$; sarà $ac'=a'c$ ec.: epperò avremo $b=mc^2$; $b'=m'c'^2$ (p. 107); e $a=c\frac{a'}{c'}$; $a'=c'\frac{a}{c}$. Quindi sarà

$P : P' = b . a : b' . a' = m \frac{a'}{c'} c^3 : m' \frac{a}{c} c'^3$; ma è per ipotesi

$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$: adunque sarà $P : P' = mc^3 : m'c'^3 = ma^3 : m'a'^3$. Adunque *se i lati delle basi di due prismi sono proporzionali, e le altezze de' prismi sono come due lati omologhi delle basi, i sudetti prismi saranno come i cubi di questi stessi lati o come i cubi delle altezze moltiplicati rispettivamente per un coefficiente costante.*

Supponiamo ora simili le basi b, b', sarà $m = m'$ (pag. 108); sicchè sarà $P : P' = c^3 : c'^3 = a^3 : a'^3$. Cioè *due prismi che hanno le basi simili, e le altezze come due lati omologhi delle basi, sono fra loro come i cubi di due lati omologhi delle basi medesime, o come i cubi delle loro altezze.*

Due prismi si dicono simili quando sono simili le basi e i parallelogrammi laterali. Or in questo caso le altezze sono come i lati de' parallelogrammi, e ne' prismi rettangoli gli stessi lati sono le altezze; epperò in amendue i casi le altezze sono come due lati omologhi delle basi. Adunque *i prismi simili sono come i cubi di due lati omologhi, o delle loro altezze.*

Tutt'i teoremi quassù enunciati pel prisma hanno luogo pe' parallelepipedi che sono de' prismi di data condizione.

88. S'intenda iscritto nella base di un cilindro retto un poligono che si considera giunto al suo limite, e da' vertici degli angoli di questo s'intendano innalzate delle perpendicolari sulla base e queste prolungate fino alla base superiore del cilindro: in questo caso, la base del cilindro differirà da quella del prisma per una grandezza inasseguabile, e potrà al prisma sostituirsi il cilindro. Quindi chiamando r il raggio della base del cilindro, e a l'altezza, sarà

$$\text{Cilindro} = \pi r^2 . a.$$

Epperò se C, C' sono due cilindri retti e r, r' i rispettivi raggi delle basi, ed a, a' le altezze, sarà $C : C' = r^2 . a : r'^2 . a'$, e se $a = a'$; $C : C' = r^2 : r'^2$, e se $r = r$, $C : C' = a : a'$; e se è $a : a' = r = r'$, ossia se i cilindri sono simili, sarà

$$C : C' = r^3 : r'^3 = a^3 : a'^3.$$

89. Sianvi due cilindri C, C' la cui superficie sia identica a quella di un rettangolo i cui lati si suppongono essere a, a': e suppongasi il predetto rettangolo avvolto circolarmente in modo che il cilindro C abbia a per circonferenza e a' per altezza; e all'opposto sia a' la circonferenza della base di C' e a l'altezza; chiamando r, r' i rispettivi raggi delle basi de'predetti cilindri; sarà, dietro di questa ipotesi, $2r\pi=a$; onde $r=\frac{a}{2\pi}$; e pel secondo $r'=\frac{a'}{2\pi}$. Quindi avremo $C=\pi r^2 a'=\frac{a^2 a'}{4\pi}$; $C'=\frac{a'^2 a}{4\pi}$; onde sarà $C : C'=a : a'$. Sicchè *le solidità di due cilindri la cui superficie è quanto quella di un rettangolo piegato circolarmente or per un lato a, or per l'altro a', sono fra loro come i lati dello stesso rettangolo piegato circolarmente.*

Se nel caso precedente è $a=na'$; sarà $C : C'=n : 1$. Per es. se $n=2$, ossia se si prenda un foglio di latta di figura rettangolare in modo che un lato sia doppio di un altro, il vôto cilindrico che si otterrà piegando circolarmente il lato più lungo sarà doppio dell'altro che nasce allorchè il lato più corto ravvolgesi in circonferenza circolare.

90. Non sia identica la superficie de' due cilindri C, C'; ma abbiano essi superficie equivalente; ossia supponendo r, r' i raggi delle loro basi e a, a' le loro altezze, sia $2r\pi a=2r'\pi a'$, sarà $r : r'=a' : a$. I loro rispettivi volumi saranno $C=\pi r^2 a$, $C'=\pi r'^2 a'$; onde sarà

$$C : C'=(r^2 : r'^2)(a : a')=(a'^2 : a^2)(a : a')=a' : a=r : r'.$$

Cioè *i volumi di due cilindri di superficie equivalente sono in ragion inversa dalle loro altezze, o nella ragion de' raggi delle basi.*

91. Siano a, a' le altezze e r, r' i raggi delle basi di due cilindri C, C'; sarà $C=\pi r^2 a$, $C'=\pi r'^2 a'$. Supponiamo $C=C'$ cioè $r^2 a=r'^2 a'$; epperò $r : r'=\sqrt{a'} : \sqrt{a}$. determiniamo la superficie S, S' di questi cilindri; sarà $S=2r\pi a$, $S'=2r'\pi a'$; epperò $S : S'=(a : a')\,(r : r')$ cioè $S : S'=a\sqrt{a'} : a'\sqrt{a}=\sqrt{a}.\sqrt{a}\sqrt{a'} : \sqrt{a'}.\sqrt{a'}\sqrt{a}=\sqrt{a} : \sqrt{a'}$.

Cioè *le superficie convesse di due cilindri eguali in un volume sono in ragion delle radici quadrate delle loro altezze.*

92. (Fig. 58). Sia $AEBF$, $GDAC$ un parallelepipedo: si tirino le diagonali AB, CD alle basi $AEBF$, $CHDS$; queste diagonali congiungeranno i lati AC, BD i quali essendo eguali e paralleli formeranno il parallelogrammo $ABDC$ (48 pag. 40) nel quale, come alla pag. 52 n.° 58, si dimostrerà che le diagonali AD, CB si taglieranno per metà in O. Parimenti tirate le diagonali EA, HS alle stesse basi, la figura $EFGA$ sarà un parallelogrammo, nel quale le diagonali FH, ES si divideranno per metà in un certo punto: or FH, AD come diagonali del parallelogrammo $AHDF$ si dividono pure per metà in un punto e la metà di AD è O: adunque anche O sarà la metà di FH, epperò di ES. Sicchè *esiste un punto preso dentro il volume di ogni parallelepipedo, per lo quale passano le diagonali del medesimo, e in esso si dividono per metà.*

Questo punto dicesi perciò *centro* del parallelepipedo.

93. (Fig. 58). Sia $AHDF$ un cubo il cui lato AF sia a, sarà $AB^2=2a^2$; epperò chiamando δ la diagonale AD di tal cubo, si avrà $\delta^2=AD^2=AB^2+AC^2=3a^2$, onde $\delta=a\sqrt{3}$. S'intenda dal centro O del cubo abbassata una perpendicolare Om su di una faccia $HCGD$ del cubo: questa perpendicolare cadrà sul centro del quadrato; onde sarà

$$Om=\sqrt{OH^2-Hm^2}=\sqrt{\frac{\delta^2}{4}-\frac{a^2}{2}}=\sqrt{\frac{3}{4}a^2-\frac{2a^2}{4}}=\frac{a}{2}.$$

Ciò posto il cubo è la somma di 6 piramidi che hanno il loro vertice al suo centro e per basi le sei facce del medesimo; e queste piramidi, essendo una certa funzione della base ed altezza, saranno eguali, ma l'espressione del cubo di a è a^3; adunque chiamando p una delle predette piramidi, sarà $6p=a^3=a^2.a\ldots$ (1). L'altezza di ciascheduna di queste piramidi è $\frac{a}{2}$ che pongasi eguale ad a'; epperò facciasi in (1) $2a'=a$, avremo $p=a^2.\frac{a}{6}=a^2.\frac{a'}{3}$. Cioè

la piramide che ha per base un quadrato a^2 ed a' per altezza è eguale a tante unità cubiche quanto è il prodotto delle unità quadrate che si contengono nella sua base pel terzo delle unità lineari che comprende l'altezza.

Intendasi il quadrato che serve di base alla predetta piramide trasformato in triangolo o in un poligono qualunque equivalente, una piramide qualunque sarà eguale alla sua base moltiplicata pel terzo della sua altezza.

94. Suppongasi un cono limite di una piramide iscritta in esso, e sia r il raggio della base del cono, e a la sua altezza, avremo

$$\text{Volume del cono} = \pi r^2 . \frac{a}{3}.$$

Epperò se C, C' sono due coni che hanno rispettivamente a, a' per altezze e r, r' per raggi delle basi, sarà $C : C' = r^2 . a : r'^2 . a'$; e se e $a = a'$, $C : C' = r^2 : r'^2$, e se le basi sono eguali, sarà $C : C' = a : a'$. E se i coni sono simili, cioè se è $a : a' = r : r'$, sarà $C : C' = (r^2 : r'^2)(r : r') = r^3 : r'^3 = a^3 : a'^3$.

95. Taglisi il cono $BADH$ con un piano qsp parallelo alla base; chiamisi A l'altezza del cono intero, a quella del cono superiore $Apsq$: sia R il raggio CD della base del cono intero, r quello della base del cono tagliato; sarà

$$\text{Tronco conico} = \frac{\pi}{3}(AR^2 - ar^2)$$

$$= \frac{\pi}{3}(AR^2 - ar^2 + Ar^2 - Ar^2 + ARr - ARr) \ldots\ldots (h)$$

ma è $R : r = A : a$, da cui si ha $Ar = aR$, epperò $-Ar^2 = -aRr$ e $-ARr = -aR^2$. Sostituendo questi valori in (h), si avrà

$$\text{Tronco conico} = \frac{\pi}{3}(AR^2 - ar^2 + Ar^2 - aRr + ARr - aR^2)$$

$$= \left(\frac{A-a}{3}\right)(\pi R^2 + \pi r^2 + \pi Rr) = \pi\left(\frac{A-a}{3}\right)(R^2 + r^2 + Rr).$$

Cioè *il volume di un tronco di cono segato da un piano paral-*

lelo alla base è eguale a tante unità cubiche quanto è il prodotto di due fattori, de' quali uno è il terzo della sua altezza, e l'altro è la somma del cerchio della base inferiore, del cerchio della base superiore, e del cerchio medio proporzionale fra queste basi.

96. Suppongasi che il predetto tronco di cono sia limite del tronco piramidale iscritto in esso, la cui altezza sia a'; chiamisi B la base inferiore della piramide e b la superiore, sarà $B=\pi R^2$, $b=\pi r^2$, e $\sqrt{Bb}=\pi Rr$; e quindi traducendo la formola del tronco conico (prec.), sarà

$$\text{Tronco piramidale}=(B+b+\sqrt{Bb})\,\frac{a'}{3};$$

ma $\sqrt{Bb}$ è la media proporzionale fra B, b e la base di questa piramide può trasformarsi in un poligono di un numero finito di lati. Adunque *se una piramide a base qualunque si taglia con un piano parallelo alla base, il volume del tronco piramidale sarà eguale al prodotto del terzo della sua altezza per la somma della sua base inferiore, della base superiore e della media proporzionale fra esse.*

97. Abbiano due coni retti C, C' eguale superficie, e siano r, r' i rispettivi raggi dalle loro basi, e l, l' i lati di essi, sarà $\pi rl=\pi r'l'$; epperò $l : l'=r' : r$. L'espressione de' rispettivi volumi di questi coni sarà $C=\frac{\pi r^2 a}{3}$; $C'=\frac{\pi r'^2 a'}{3}$; epperò

$C=C'=(r^2 : r'^2)(a : a')=(l'^2 : l^2)(a : a')$; suppongasi che sia

$l : l'=a : a'$, sarà $C : C'=l'^2.l : l^2.l'=l' : l=a' : a=r : r'$.

Cioè *i coni la cui superficie è eguale, e che di più hanno i lati come le altezze avranno i volumi in ragion reciproca di lati o delle altezze, o in ragion diretta de' raggi delle basi.*

98. Siano due coni C, C' di egual volume, sarà $\pi r^2 a=\pi r'^2 a'$; epperò $r : r'=\sqrt{a'} : \sqrt{a}$: chiamo S, S' la superficie di questi coni rispettivamente e l, l' i loro lati, sarà $S=\pi rl$, $S'=\pi r'l'$; onde si avrà $S : S'=(r : r')(l : l')=(\sqrt{a'} : \sqrt{a})(l : l')$; e nell'ipotesi di $a : a'=l : l'$, sarà $S : S'=(a : a')(\sqrt{a'} : \sqrt{a})=a\sqrt{a'} : a'\sqrt{a}=\sqrt{a} : \sqrt{a'}=\sqrt{l} : \sqrt{l'}=r' : r$. Cioè *due coni eguali in volume e*

che di più hanno le altezze come i lati, avranno le superficie come le radici delle altezze o de' lati, o in ragion reciproca de' raggi.

99. (Fig. 54). Se suppongasi che un piano $LA'K$ sia perpendicolare al raggio A' all'estremità A' del medesimo, e se suppongasi tirata un'altra retta FP dal centro F sullo stesso piano e congiunta la $A'P$, sarà $FA' = FP \cos PFA'$; epperò $FA' < FP$: adunque ogni altro punto di questo piano diverso da A' sarà fuori della sfera: epperò questo piano dicesi tangente alla sfera. Supponiamo ora che un piano parallelo ad $LA'K$ seghi la sfera e che questo si muova parallelamente a se stesso avvicinandosi al piano tangente, la zona del segmento tagliato dal predetto piano, presso al suo limite A' diverrà evanescente; chiamo ρ questa zona elementare ed ε la sua altezza; e supponiamo la detta zona base di un settore sferico la cui altezza è il raggio r della sfera; questo settore elementare potrà supporsi eguale al cono c la cui base è anche l'elemento ρ della superficie sferica e la cui altezza è r; sarà perciò $c = \rho \frac{r}{3} = \frac{2}{3} \pi r^2 \varepsilon$ (71). Sia ora la zona finita $\Psi = n\rho$, sarà $\Psi = n\rho = 2r\pi . n\varepsilon$. Epperò chiamando S il settore che ha Ψ per base, sarà $S = \Psi \frac{r}{3} = \frac{2r^2}{3} \pi n\varepsilon$. Supponiamo che la zona cresca fino a divenire l'emisfero, sarà allora $n\varepsilon = r$; epperò emisfero $= \frac{2}{3} \pi r^3$; e quindi si avrà, facendo anche $2r = \delta$,

$$\text{Volume della sfera} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{\pi \delta^3}{6}$$

$$\text{Volume del settore la cui altezza è } a = \frac{2}{3} \pi r^2 a.$$

Quindi se r, r' sono i raggi di due sfere S, S', sarà $S : S' = r^3 : r'^3$: e se Ψ, Ψ' indicano due settori, secondochè essi appartengono a sfere diseguali ed hanno differente altezza, o appartengono alla stessa sfera con altezze diseguali, e a differenti sfere con altezze eguali; sarà rispettivamente

$$\Psi : \Psi' = r^2 a : r'^2 a'; \quad \Psi : \Psi' = a : a'; \quad \Psi : \Psi' = r^2 : r'^2.$$

100. (Fig. 54). Sia il segmento $BAB'm$ la cui altezza Am sia a; sia r il raggio della sfera, epperò $Fm=r-a$, sarà

$mB^2=Am.mA'=a(2r-a)=(2ar-a^2)$. Ciò posto si ha

Segmento sferico ad una base $ABB'n'$=Settore sferico $ABFn'B'$

— cono $BFn'm=\frac{2}{3}\pi r^2a-\frac{\pi}{3}(r-a)(2ra-a^2)$ (prec.)=

$$\frac{\pi}{3}(2ar^2-2ar^2+2a^2r+a^2r-a^3)=\frac{\pi}{3}(3a^2r-a^3)=\pi a^2\left(r-\frac{a}{3}\right).$$

Cioè *il segmento sferico ad una base è eguale ad un cilindro di cui il cerchio della base ha per raggio l'altezza del segmento, e l'altezza di esso cilindro è la differenza fra il raggio della sfera e'l terzo dell'altezza del segmento.*

Se facciamo $AD=a'$, sarà Segmento $ACC'D=\pi a'^2\left(r-\frac{a'}{2}\right)$.

Epperò si avrà

Segmento $BCC'B'=ACC'D-ABB'M=\pi r(a'^2-a^2)-\frac{\pi}{3}(a'^3-a^3)$

$$=\frac{\pi}{3}(a'-a)[3r(a'+a)-(a'^2+aa'+a^2)].$$

101. Sia BhB' un cerchio minore e si unisca il centro F della sfera col centro m del cerchio minore, l'equazione cardinale (I pag. 18) applicata a'triangoli FmB, FmB' sotto la condizione $FB=FB'$, $mB=mB'$, darà

$Fm=FB\cos mFB+mB\cos FmB$; $Fm=FB\cos mFB'+mB\cos FmB'$.

La differenza dà

$$FB(\cos mFB-\cos mFB')=mB(\cos FmB-\cos FmB')=0;$$

quindi sarà $\cos mFB-\cos mFB'=0$; $\cos FmB-\cos FmB'=0$; cioè $mFB=mFB'$, e $FmB=FmB'$; epperò sarà Fm' perpendicolare a BmB' (25 pag. 21); e dimostrandosi parimente Fm perpendicolare ad ogni altro diametro di BkB' sarà Fm perpendico-

lare al cerchio minore BEB'. Adunque *ogni diametro della sfera che passa pel centro di un cerchio minore è perpendicolare al piano di questo* (*a*).

102. Intendasi circoscritto al triangolo sferico i cui lati sono rispettivamente a, b, c un cerchio; chiamando a', b', c' le rispettive corde di a, b, c, sarà $a'=2\text{sen}\frac{a}{2}$; $b'=2\text{sen}\frac{b}{2}$; $c'=2\text{sen}\frac{c}{2}$ (n.° 96 pag. 93). Epperò il raggio del cerchio circoscritto al predetto triangolo sarà $r=\frac{a'b'c'}{4S}$ (n.° 131 pag. 114) in cui S dinota la superficie del triangolo i cui lati sono le corde a', b', c': e sostituendo ad a', b', c' i rispettivi loro valori, e il valore di $4S$ (pag. 114), si avrà

$$r=\frac{8\text{sen}\frac{a}{2}\text{sen}\frac{b}{2}\text{sen}\frac{c}{2}}{\sqrt{\begin{matrix}2\left(\text{sen}\frac{a}{2}+\text{sen}\frac{b}{2}+\text{sen}\frac{c}{2}\right)2\left(\text{sen}\frac{a}{2}+\text{sen}\frac{b}{2}-\text{sen}\frac{c}{2}\right)\\ 2\left(\text{sen}\frac{a}{2}+\text{sen}\frac{c}{2}-\text{sen}\frac{b}{2}\right)2\left(\text{sen}\frac{b}{2}+\text{sen}\frac{c}{2}-\text{sen}\frac{a}{2}\right)\end{matrix}}}$$

Il denominatore di questo fratto può mettersi sotto la seguente forma

$$\left\{\begin{matrix}32\text{sen}^2\frac{a}{2}\text{sen}^2\frac{b}{2}+32\text{sen}^2\frac{a}{2}\text{sen}^2\frac{c}{2}+32\text{sen}^2\frac{b}{2}\text{sen}^2\frac{c}{2}\\ -16\text{sen}^4\frac{a}{2}-16\text{sen}^4\frac{b}{2}-16\text{sen}^4\frac{c}{2}\end{matrix}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{\begin{matrix}8.2\text{sen}^2\frac{a}{2}.2\text{sen}^2\frac{b}{2}+8.2\text{sen}^2\frac{a}{2}.2\text{sen}^2\frac{c}{2}+8.2\text{sen}^2\frac{b}{2}.2\text{sen}^2\frac{c}{2}\\ -4.2\text{sen}^2\frac{a}{2}.2\text{sen}^2\frac{a}{2}-4.2\text{sen}^2\frac{b}{2}.2\text{sen}^2\frac{b}{2}-4.2\text{sen}^2\frac{c}{2}.2\text{sen}^2\frac{c}{2}\end{matrix}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\left\{\begin{matrix}8[(1-\cos a)(1-\cos b)+(1-\cos a)(1-\cos c)+(1-\cos b)(1-\cos c)]\\ -4[(1-\cos a)^2+(1-\cos b)^2+(1-\cos c)^2]\end{matrix}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

(*a*) Il teorema riga ultima pag. 200 può essere una conseguenza di questo.

$$=\left\{\begin{array}{c}8[1-\cos a-\cos b-\cos c+\cos a\cos b+\cos a\cos c+\cos b\cos c]\\+4(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c)\end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{\begin{array}{c}8[1\cos a-\cos b-\cos c+\cos a\cos b+\cos a\cos c+\cos b\cos c]\\-8\cos a\cos b\cos c+4-4\cos^2 a-4\cos^2 b-4\cos^2 c+8\cos a\cos b\cos c\end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{\begin{array}{c}8(1-\cos a)(1-\cos b)(1-\cos c)+4(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c)\\-4(\cos a-\cos b\cos c)^2\end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(8(1-\cos a)(1-\cos b)(1-\cos c)+4[\operatorname{sen}^2 b\operatorname{sen}^2 c-(\cos a-\cos b\cos c)^2]\right)^{\frac{1}{2}}..(e)$$

ma è

$$\operatorname{sen}^2 b\operatorname{sen}^2 c-(\cos a-\cos b\cos c)^2$$

$$=(\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c+\cos a-\cos b\cos c)(\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c-\cos a+\cos b\cos c)$$

$$=(\cos a-\cos(b+c)(\cos(b-c)-\cos a)$$

$$=2\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}.2\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}.\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2},$$

sostituendo in (e) e riducendo così il denominatore di r si avrà

$$r=\frac{8\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{\sqrt{\begin{array}{c}8(1-\cos a)(1-\cos b)(1-\cos c)+\\16\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2}\end{array}}};$$

Facciasi $\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2}.\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}\ldots=\Psi^2\ldots(\rho)$; sarà

$$r=\frac{8\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{\sqrt{8(1-\cos a)(1-\cos b)(1-\cos c)+16\Psi^2}}=$$

$$=\frac{8\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{\sqrt{8.2\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}.2\operatorname{sen}^2\frac{b}{2}.2\operatorname{sen}^2\frac{c}{2}+16\Psi^2}}=$$

$$=\frac{4\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{\sqrt{16\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}\operatorname{sen}^2\frac{b}{2}\operatorname{sen}^2\frac{c}{2}+4\Psi^2}}\ldots\ldots(\mathrm{I}).$$

Dal centro della sfera si tiri il raggio al centro del cerchio circoscritto al triangolo sferico i cui lati sono a, b, c; questo raggio sarà perpendicolare al piano del predetto cerchio (pag. 124, 101) e'l suo estremo sarà polo del medesimo.

Facendo passare un cerchio massimo perpendicolare al piano del cerchio minore predetto, l'arco φ del cerchio massimo intercetto fra il polo medesimo e'l cerchio minore avrà r per seno, e la perpendicolare p tirata dal centro della sfera al centro del cerchio minore sarà coseno di φ. Epperò avremo

$$r=\operatorname{sen}\varphi=\frac{4\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{\sqrt{16\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}\operatorname{sen}^2\frac{b}{2}\operatorname{sen}^2\frac{c}{2}+4\Psi^2}};$$

quindi sarà

$$p=\cos\varphi=\frac{2\Psi}{\sqrt{16\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}\operatorname{sen}^2\frac{b}{2}\operatorname{sen}^2\frac{c}{2}+\Psi^2}}\ldots\ldots(\mathrm{II}):$$

Adunque sarà

$$2\operatorname{tang}\varphi=\frac{8\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{2\Psi}=$$

$$=\frac{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\,.\,2\operatorname{sen}\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}\,.\,2\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}{2\Psi\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}=\frac{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}{2\Psi\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}},$$

da cui si ha

$$2\text{tang}\,\varphi\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}=\frac{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c}{2\Psi}=$$

$$=\frac{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c}{2\sqrt{\text{sen}\frac{a+b+c}{2}\,\text{sen}\frac{b+c-a}{2}\,\text{sen}\frac{a+b-c}{2}\,\text{sen}\frac{a+c-b}{2}}}\ldots\text{(III)}$$

Ciò posto abbiamo (pag. 158 (I))

$$\cos\alpha=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c};$$

onde sarà

$$\text{sen}\,\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{\text{sen}^2 b\,\text{sen}^2 c-(\cos a-\cos b\cos c)^2}}{\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c}=$$

$$=\frac{\sqrt{(\cos a-\cos(b+c)\,(\cos(b-c)-\cos a)}}{\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c}=$$

$$=\frac{2\sqrt{\text{sen}\frac{a+b+c}{2}\,\text{sen}\frac{b+c-a}{2}\,\text{sen}\frac{a+c-b}{2}\,\text{sen}\frac{a+b-c}{2}}}{\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c};$$

paragonando questa equazione alla (III) sarà

$$\frac{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c}{2\Psi}=\frac{\text{sen}\,a}{\text{sen}\,\alpha}\ldots\ldots\text{(IV)}.$$

Chiamiamo Ψ' la superficie del triangolo i cui lati sono

$a'=2\text{sen}\frac{a}{2}$; $b'=2\text{sen}\frac{b}{2}$; $c'=2\text{sen}\frac{c}{2}$; sarà (pag. 114, (*h*))

$$\Psi'=\frac{a'b'c'}{4r}=\frac{2\text{sen}\frac{a}{2}\,\text{sen}\frac{b}{2}\,\text{sen}\frac{c}{2}}{r}=\frac{2\text{sen}\frac{a}{2}\,\text{sen}\frac{b}{2}\,\text{sen}\frac{c}{2}}{\text{sen}\,\varphi}:$$

epperò la piramide triangolare P che ha il triangolo Ψ' per base e

per vertice il centro della sfera, cioè $p=\cos\varphi$ per altezza, sarà data da

$$P=\frac{\Psi'\cos\varphi}{3}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{3}\cot\varphi=\frac{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{3\operatorname{tang}\varphi}$$

$$=2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cdot\frac{12\Psi\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}=$$

$$2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cdot\frac{12\Psi\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}2\operatorname{sen}\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}2\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}=\frac{\Psi}{3}:$$

dunque la Ψ indica il prisma della stessa base ed altezza della piramide P (93 pag. 220); epperò il volume P della predetta piramide sarà espresso (equaz. ρ pag. 226), da

$$P=\frac{1}{3}\sqrt{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2}\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}}\ldots\text{(V)}$$

in cui a, b, c sono rispettivamente gli angoli piani che formano l'angolo solido posto al centro della sfera (n.° 3 pag. 156).

La stessa piramide potrà avere anche la seguente semplicissima espressione dedotta dall'equazione (IV)

$$P=\frac{\Psi}{3}=\frac{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c\operatorname{sen}\alpha}{6}=\frac{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}c\operatorname{sen}\beta}{6}=\frac{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b\operatorname{sen}\gamma}{6}\ldots\text{(VI)}$$

ch'è data per due angoli piani e per l'angolo diedro contenuto da' piani di questi angoli.

Abbiamo veduto (133 pag. 110) che, chiamando Ψ la superficie di un triangolo rettilineo i cui lati sono a, b, c, è

$$\Psi'=\frac{ab\operatorname{sen}(a,b)}{2}=\frac{ac\operatorname{sen}(a,c)}{2}=\frac{bc\operatorname{sen}(b,c)}{2}:$$

ma è

$$\Psi=\frac{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c\operatorname{sen}\alpha}{2}=\frac{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c\operatorname{sen}(b,c)}{2}\text{ ec.},$$

e Ψ il simbolo del prisma triangolare la cui base è il triangolo che ha per lati le corde di a, b, c; adunque vi è un'analogia di forma fra l'espressione del triangolo dato per due lati e l'angolo compreso e quella del prisma triangolare la cui base ha per lati le corde de'lati di un triangolo sferico, essendo il detto prisma dato per mezzo di due lati del triangolo sferico predetto e dell'angolo da essi compreso.

Essendo (VI) $\operatorname{sen}\gamma = \frac{2\Psi}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$, se da β s'intende abbassato un arco normale sopra b, chiamando θ quest'arco, sarà

$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} a \operatorname{sen}\gamma$ (II pag. 159) $= \frac{2\Psi}{\operatorname{sen} b}$..... (VII), espressione elegante della perpendicolare abbassata nel triangolo sferico dal vertico β nel lato opposto b. Le perpendicolari abbassate da' vertici degli angoli α, γ sopra a, c rispettivamente sono espresse da $\frac{2\Psi}{\operatorname{sen} a}$, $\frac{2\Psi}{\operatorname{sen} c}$. E poichè le perpendicolari nel triangolo rettilineo abbassate su di b, su di a e su di c da'vertici degli angoli opposti, essendo Ψ' la superficie del triangolo, sono rispettivamente $\frac{2\Psi'}{a}$, $\frac{2\Psi'}{b}$, $\frac{2\Psi'}{c}$, si vede che anche in queste perpendicolari esiste un'analogia di forma ne' triangoli rettilinei e negli sferici.

L'equazioni quassù recate

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2\Psi}{\operatorname{sen} b};\ \operatorname{sen}\theta' = \frac{2\Psi}{\operatorname{sen} a};\ \operatorname{sen}\theta'' = \frac{2\Psi}{\operatorname{sen} c} \text{ danno}$$

$$P = \frac{\Psi}{3} = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen}\theta}{6} = \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen}\theta'}{6} = \frac{\operatorname{sen} c \operatorname{sen}\theta''}{6}.$$

Elegantissima espressione della piramide che ha per base il triangolo fatto dalle corde degli archi a, b, c di un triangolo sferico e che ha il suo vertice al centro della sfera.

Tutte queste formole sono dell'immortale Lagrangia; ma egli le ottiene per un cammino più lungo, e di fatti supponendo p, q, r tre lati del tetraedro, ed a l'angolo fatto da p, q, il triangolo i cui

lati sono p, q sarà $\frac{pq\,\text{sen}(p,\,q)}{2}=\frac{pq\,\text{sen}\,a}{2}$. Or se dall'estremo r s'intende abbassata la perpendicolare P' sul piano $(p,\,q)$, la piramide P sarà espressa da $\frac{P'pq\,\text{sen}\,a}{6}$; ma se l'angolo di $(r,\,pq)=\theta$ è $P'=r\,\text{sen}\,\theta$; sostituendo sarà $P=\frac{pqr\,\text{sen}\,a\,\text{sen}\,\theta}{6}$, la quale formola diviene $P=\frac{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,\theta}{6}$ nell'ipotesi di $p=1$, $q=1$, $r=1$; cioè $\frac{\Psi}{3}=\frac{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,\theta}{6}$, da cui si ha $\text{sen}\,\theta=\frac{2\Psi}{\text{sen}\,a}$, formole identiche a quelle che noi abbiamo ottenuto per un cammino più breve.

Essendo $\frac{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,\theta}{6}=\frac{\Psi}{3}$, sarà

$$\frac{pqr\,\text{sen}\,a\,\text{sen}\,\theta}{6}=\frac{pqr\Psi}{3}=$$

$$\frac{pqr}{3}\sqrt{\text{sen}\frac{a+b+c}{2}\,\text{sen}\frac{b+c-a}{2}\,\text{sen}\frac{a+c-b}{2}\,\text{sen}\frac{a+b-c}{2}}$$

formola semplicissima del volume di una piramide che ha per costole p, q, r, le quali formano degli angoli piani $a=(p,\,q)$, $b=(p,\,r)$, $c=(q,\,r)$.

FINE.

Digitized by Google

INDICE RAGIONATO

Prenozioni o linguaggio geometrico da . . . pag. 1 a 13
Linee trigonometriche. . . . . 13 e 14
L' espressione di una linea trigonometrica l di un arco φ riferita al raggio r è l=rfφ, in cui f indica una funzione . . . . . 14 e 15
Varie dimostrazioni della formola l=rfφ. . . . . 14 a 18
Forma che prende una linea trigonometrica quando dal raggio 1 si riferisce al raggio r ed all' opposto. . . 18
Dimostrazione dell'equazione fondamentale in un triangolo in cui la perpendicolare abbassata da un angolo sul lat' opposto cade fra' lati 18
Il raggio perpendicolare ad una corda divide per metà la corda stessa e l' arco sotteso della medesima . . 19
Il seno di un arco è la metà della corda dell'arco doppio ivi
Archi positivi e negativi, seni e coseni positivi e negativi. 20
Seni e coseni di due archi supplementi e complementi seni e coseni di $\left(\frac{\pi}{n} \pm b\right)$ *secondo i valori 4, 2,* $\frac{4}{3}$, *1 dati ad n . . . . . 20 a 21*
Gli angoli conseguenti sono eguali a due retti . . . 21
Dimostrazione del teorema fondamentale, anche quando la perpendicolare che si abbassa da un angolo sul lato opposto cade fuori i lati . . . . . 21 e 22

Il quadrato dal lato opposto all'angolo retto di un triangolo rettangolo è eguale a'quadrati de'lati che lo comprendono 22
Gli angoli di un triangolo rettangolo sono eguali a due retti 23
Gli angoli di un triangolo qualunque sono eguali a due retti: conseguenze . . . . . 23 e 24
Angoli di un poligono qualunque interni o esterni . . 24
Eguaglianza degli angoli verticali 25
Condizioni dell' eguaglianza de' triangoli . . . . 25 a 28
Condizioni della simiglianza de' triangoli . . . . 29 a 36
Maniera come s'interpretano alcune equazioni risultanti. 33* 35*
Espressioni delle altre linee trigonometriche in funzione del seno e del coseno 30
Segni delle tangenti, seganti, cotangenti e coseganti degli archi, secondo che sono minori o maggiori del retto 31
Tangenti, cotangenti, seganti, coseganti degli archi 45°, 90°, 180°, 270°, 360° . . . . . 31 e 32
Alcune trasformazioni delle linee trigonometriche. . 32
*Teorica delle parallele * 50 pag. 42* . . . . . 36 a 40
Condizioni perchè un quadrilatero sia parallelogrammo. 40 e 41
Proprietà di parallelogrammi pag. 42; e n.i 58, 59, 61, 62.
Rette che tiransi fra due lati di un triangolo parallele al terzo lato . . . . . 43 e 44
Relazioni fra' lati di un triangolo e gli angoli opposti. 44 e 45
Perpendicolare ed obblique che tiransi da un punto su di una retta . . . . . 45 a 48
Relazioni trigonometriche fra' lati e gli angoli acuti di un triangolo rettangolo 48
Relazioni che nascono quando dal vertice dell' angolo retto di un triangolo rettangolo si abbassa la perpendicolare sul lato opposto 49
I seni degli angoli di un triangolo rettilineo sono come i lati opposti 50
Se il quadrato di un lato di un triangolo è eguale a'qua-

drati degli altri due lati, l'angolo da questi compreso è retto. 50
Relazioni che sorgono in un triangolo quando dagli estremi di un lato si tirano due rette che vanno a congiungersi in un qualsiasi punto. . . . . . 50 a 52
Equazioni fra' tre lati e un angolo del triangolo . . 56
Analisi di due triangoli che hanno due lati eguali rispettivamente e l'angolo che questi fanno in uno di essi è maggiore dell'altro. . . . . . 57 * 58
Relazioni che nascono in un triangolo quando un angolo qualunque di esso si divide per metà; teorema inverso . . . . . 60 a 62
Relazione fra' lati di un triangolo, quando da un angolo si tira una retta sulla metà del lato opposto. . 62 e 63
Seno e coseno della somma o differenza di due angoli. 63 a 65
Dimostrazione della formola $\text{sen}^2(\varphi+\theta)+\cos^2(\varphi+\theta)=r^2$; $\text{sen}^2(n+1)\varphi+\cos^2(n+1)\varphi=r^2$ . . . . . 65 e 66
Formole di $\text{sen}\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\ldots\text{sen}\left(\frac{4\pi+1}{4}\pi\pm b\right)\ldots$ $\text{sen}(\varphi+\theta+\text{sen}(\varphi-\theta)$ ec. 67
Formole dipendenti dalle precedenti, e di un uso continuo. . . . . . 68 a 72
Formole binomie per aver un angolo in funzione de' lati. 72 e 73
Formole diverse per aver la differenza di due angoli, dati due lati e l'angolo compreso. . . . . . 74 e 75
Formole di Legendre per risolvere un triangolo obbliquangolo per mezzo del triangolo rettangolo . . . 76 e 77
Altra formola di Legendre, utile quando due lati sono dati pe' loro logaritmi. 78
Nuovo teorema per aver un angolo per mezzo di due lati e dell'angolo compreso . . . . . 78 e 79
Formola del Franchini per aver un angolo per mezzo di un altro e del rapporto de' lati che lo comprendono. . 79
Nuova formola per determinare direttamente coll'aiuto de' logaritmi un lato per mezzo degli altri due e dal-

l'angolo compreso da questi: uso di questa formola e costruzione geometrica di essa; riflessione . 79 e 80
Formole che dimostrano indeterminato il problema quando sono dati i soli angoli de' triangoli: gli angoli di un triangolo rettilineo sono eguali a due retti. 81 e 82
I poligoni simili si risolvono in egual numero di triangoli simili . . . . . 82 e 83
Analisi della definizione de' poligoni simili. . . . 83 a 85
Formola dedotta dalla nostra equazione, la quale dimostra che l'analisi de' poligoni è determinata quando, oltre gli angoli, è dato un lato . . . . . 85 e 86
Il centro di un cerchio è nella retta che divide una corda per metà e ad angoli retti . . . . . 86 e 87
Teoremi che risguardano le corde tirate nel cerchio con varie condizioni. . . . . . 86 a 90
Se l'angolo di due corde eguali è diviso per metà da una retta, questa passerà pel centro 88
Formole che danno la relazione degli angoli fatti al centro di cerchi eguali e degli archi e delle corde sulle quali poggiano. 89
Centro di un cerchio. 90
Riflessione sul grado de' problemi che risguardano la retta e il cerchio. ivi
Formole che danno le relazioni fra' cerchi che si toccano o si segano e i loro centri. 91
Formole che mostrano la proprietà degli angoli fatti nel semicerchio, e in qualsiasi segmento circolare. . . . 92
Proprietà essenziale del cerchio, equazione del cerchio; riflessioni. . . . . . 93 e 94
Proprietà della tagente al cerchio: angolo della tangente con una corda, e teorema inverso; relazione fra la tangente le seganti che si tirano da uno stesso punto esteriore al cerchio, e fra le corde che si segano dentro al cerchio . . . . . 94 a 97
Teoremi delle incidenti che cadono sulla circonferenza circolare da un punto preso dentro di esso o fuori . 98 e 99

La congiungente de' centri di due cerchi che si segano è perpendicolare alla retta che unisce i punti d' intersezione. 100
Superficie di poligoni: metodo usati da' geometri: metodo seguito nel libro. Forma dell' equazione della superficie di un rettangolo come funzione de' lati . 100 a 103
Rapporti nella superficie de' parallelogrammi è de' triangoli, secondo le varie ipotesi. . . . . . 103 a 106
La superficie di un poligono è eguale a quella di un rettangolo che ha per lati, un lato qualunque del poligono e la terza proporzionale in ordine allo stesso lato e al lato del quadrato equivalente al poligono. . . 106 e 107
Se A è il lato del poligono, la superficie è p A^2. . . . 107
Il coefficiente p è identico ne' poligoni simili; Relazione fra le superficie de' triangoli e de' poligoni simili. 107 e 108
Il poligono descritto sull' ipotenusa è eguale alla somma de' poligoni simili descritti su' catetti 109
Formole varie della superficie de' triangoli, secondo i dati: formola del Legendre per mezzo di due angoli, e la differenza de' quadrati de' lati opposti. . . 110 e 111
Raggio del triangolo iscritto nel cerchio, del triangolo equilatero iscritto; riflessioni: ad un triangolo qualunque può sempre circoscriversi il cerchio . . . . 111 e 112
Il lato dell' esagono regolare iscrittibile nel cerchio è eguale al raggio 113
Il centro del cerchio è nella retta che divide per metà l' angolo di due tangenti tirate da uno stesso punto . 114 e 115
Raggio del cerchio iscritto nel triangolo; superficie di tale triangolo 115
Altra formola del raggio del cerchio iscritto nel triangolo: il raggio del cerchio circoscritto ad un triangolo è doppio di quello dell' iscritto . . . . . 116 e 117
Formole che danno le condizioni affinchè un cerchio passi per quattro punti; gli angoli opposti de' quadrilateri iscritti sono eguali a due retti . . . . 117 a 120
Teorema di Tolomeo e di Legendre sul tetragono iscritto. 120 a 122

Nuovo teorema sul tetragono iscritto, formola (H). . . 124
Altro teorema importante dedotto dal precedente, formola (L) 125
Centro di un poligono regolare: raggi del cerchio circoscritto ed iscritto al medesimo. . . . . . 126 a 128
Teorica dell' iscrizione e circoscrizione de' poligoni regolari nel cerchio . . . . . 128 a 136
Espressioni del lato de' poligoni che si possono iscrivere (III)... (VII). *Il problema della iscrizione ec. può dipendere dal lato iscritto dal poligono regolare di 60 lati* . . . . . 133 e 134
Espressione, l'uno per l'altro, del lato del poligono circoscritto e iscritto, noto il raggio del cerchio . . 134
Il lato di un poligono è minore del lato del poligono di un minor numero di lati ivi
Il perimetro del poligono iscritto di un doppio numero di lati è maggiore del perimetro del poligono iscritto di minor numero di lati; epperò i perimetri di poligoni iscritti, crescendo di lati, si approssimano alla circonferenza 135
I lati di poligoni circoscritti diminuiscono come cresce il numero di essi: la circonferenza è il limite comune de' perimetri de' poligoni regolari iscritti e circoscritti, e'l cerchio della loro superficie. . . . . . 135 e 136
Rapporto della circonferenza al diametro . . . . 136 e 137
Formola della circonferenza e della superficie del cerchio 138
Rettificazione di un dato arco eguale al raggio; settore, segmento; spazii mistilinei che possono aversi nel cerchio . . . . . 139 a 141
Problema trigonometrico. . . . . 141 a 144
Soluzioni analitiche di 24 quistioni sul triangolo e sul tetragono, coll' applicazione dell'equazione cardinale ad alcune di esse . . . . . 144 a 151
Radici dell' equazione di terzo grado del caso irreducibile per mezzo della trigonometria . . . . . 151 a 154

SECONDA PARTE — *Geometria e trigonometria sferica, e principali teoremi della geometria solida: prenozioni* . . . . . » . . . . . 155 e 156
Formola fondamentale della geometria e trigonometria sferica dedotta dalla formola cardinale de' triangoli rettilinei. Essa come quella de' triangoli rettilinei è fra cinque elementi . . . . . 156 a 158
Si deducono da questa formola le quattro equazioni atte a risolvere un triangolo sferico, (I. II. III. IV.) . 158 a 160
Relazioni fra' lati e gli angoli opposti de' triangoli: teoremi di geometria sferica dedotte dalla stessa formola cardinale. . . . . . 161 a 189
Analisi di alcune inequazioni dedotte da' triangoli sferici per dimostrare un teorema di geometria sferica. 166 a 171
Nuova dimostrazione delle Analogie di Nepero dedotta dalla nostra formola cardinale. . . . . . 189 a 193
Casi dubbi nella risoluzione de' triangoli sferici. . . 193 a 196
Alcuni teoremi fondamentali della geometria solida dedotti da' teoremi dimostrati nella prima parte. . . 196 a 198
Teorema dimostrato coll'applicazione diretta dall'equazione cardinale (n. 63) 199
Superficie de' volumi considerati nella geometria solida: superficie del fuso e del triangolo sferico. . . . 198 a 215
Volume de' corpi considerati nella geometria solida . 215 a 224
Il diametro della sfera che si tira al centro di un cerchio minore è perpendicolare al piano di questo . . 224 e 225
Analisi del tetraedro secondo l'idea di Lagrangia, in qualche parte resa più semplice 225

FINE.

SBN 608755

ERRORI NECESSARI A CORRIGERSI

Pag. 24 riga 11 da sotto leggi *quattro retti* per *due retti*

Pag. 31 riga 10 leggi *hanno* per *avranno*

Pag. 46 riga 10 leggi *e inversamente; e le obblique* per *e inversamente, le obblique*

Pag. 79 riga 7 da sotto leggi $b-2c\cos A$ per $b-2c\cos\varphi$

Pag. 87 § 86 linea 3 leggi $AM'=M'B'$ invece di $AM'=M'A'$

Pag. 88 riga 1 leggi AB' per AC', e riga 9 leggi $B''K'A''$ per $B''KA''$

Pag. 128 riga 11 leggi *de' poligoni regolari simili* invece di *de' poligoni simili*

Pag. 159 nella 5ª equ. di (III) leggi $\operatorname{sen} c \cot a$ per $\operatorname{sen} c \cot \alpha$

Pag. 201 riga 6 aggiugni vedi pag. 224 n.º 101.

Pag. 220 le S debbono essere G: e riga 9 invece di EA leggi EF

Idem riga 20 leggi $AD^2=AB^2+BD^2$ invece di $AD^2=AB^2+AC^2$

Pag. 224 n.º 101 riga 1 leggi BkB' invece di BhB'

Digitized by Google

OPERE E MEMORIE PRINCIPALI

PUBBLICATE

DAL CAV. FERDINANDO DE LUCA

Nuovo Sistema di studî geometrici analiticamente dedotti dallo svolgimento di una sola equazione.

Geometria Sintetica (1810). Esaurita.

Geometria piana trattata coll'analisi geometrica degli Antichi.

Trigonometria Analitica con un saggio di Poligonometria (1811).

Geometria Analitica (1811).

Analisi a due coordinate (1812).

Agrimensura popolare, ove il problema della divisione del poligono in data ragione è generalmente sciolto con metodo elementarissimo.

Nuovi elementi di Geografia disposti secondo l'ordine dell'insegnamento.

Instituzioni Elementari di Geografia naturale topografica politica astronomica fisica e morale, con un rame per uso della geografia astronomica. (La sesta edizione è sotto al torchio).

Elementi di Geografia Antica. (Quarta edizione).

Atlantino geografico di otto carte composto con un nuovo sistema per uso delle precedenti opere geografiche.

Note all'edizione napolitana del Compendio di geografia di A. Balbi.

Pensieri sull'educazione applicati all'Instruzione de'Seminarî (esaurita).

Piano di un'educazione compiuta religiosa letteraria scientifica e morale (esaurita).

Sul miglior metodo di una pubblica instruzione (esaurita).

Sulla meteora americana comparsa a Filadelfia nel 1833. Memoria 1 e 2, nella quale da' limiti geografici fra' quali è stata essa osservata si deduce matematicamente l'altezza del sito di essa.

Memoria sulle stelle cadenti.

Memoria letta all'Accademia Pontaniana sul migliore ordinamento degli studî geografici.

Memoria per rivendicare alla scuola Italica tutta l'antica geometria, cioè l'analisi geometrica, i luoghi geometrici e le sezioni coniche; con una polemica.

Varie memorie su' varî punti della storia delle matematiche inserite nel Progresso e pubblicate in un'opera a parte con alcune modificazioni. (Esaurita).

Memoria sulla giusta nozione che bisogna dare alla Geografia storica, confusa finora colla storia geografica e colla storia (n'esiste un favorevolissimo cenno nel Giornale dell'Instituto Storico di Francia tom. V pag. 187).

Esame critico di alcuni opuscoli pubblicati intorno al sistema metrico della città di Napoli. (Esaurito).

Tavole per la conversione reciproca de'pesi e delle misure antiche in quelle sanzionate dalla Legge de'6 Aprile 1840.

Sul magneto-elettricismo, memoria letta alla R. Ac. delle scienze nella quistione di anteriorità tra i chiarissimi Faraday e Nobili.

E molte altre memorie e rapporti matematici geografici e fisici inseriti nel Rendiconto dei lavori della R. Accademia delle scienze, e in altri giornali nazionali e esteri.

Memoria intorno all'influenza del metodo numerico analitico per trattare esclusivamente la meccanica industriale e la fisica moderna. Proposta di un nuovo sistema di studî matematici. Letta nel VII Congresso degli Scienziati Italiani.

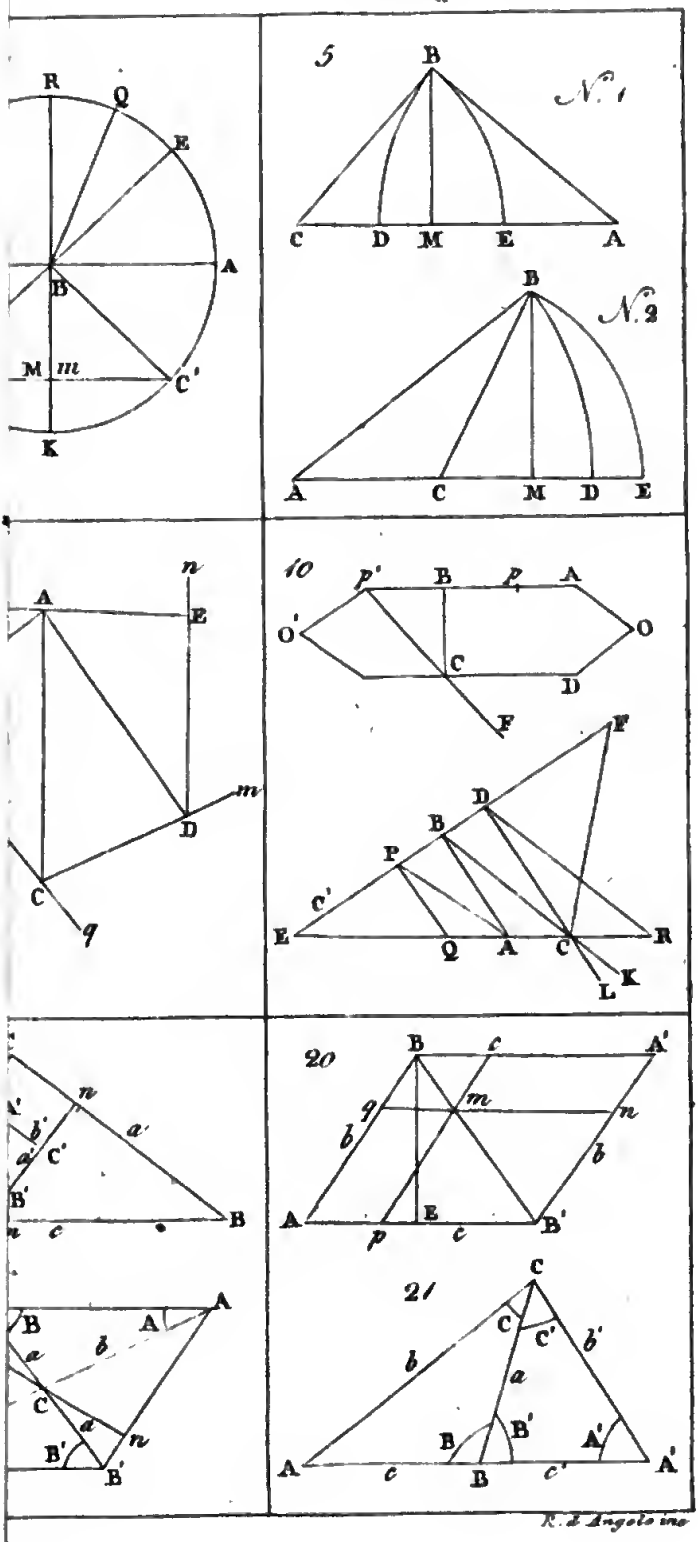
Memoria sullo stato attuale della geografia (1845): epperò de'vôti che rendono ancora incompiuta la geografia classica del Secolo XIX. Letta nel VII Congresso degli Scienziati Italiani.

Dell'influenza degli studî geografici sulle scienze naturali. Errori in geografia: mezzo di conciliare certe relazioni apparentemente contradittorie. Letta nella R. Accademia delle Scienze.

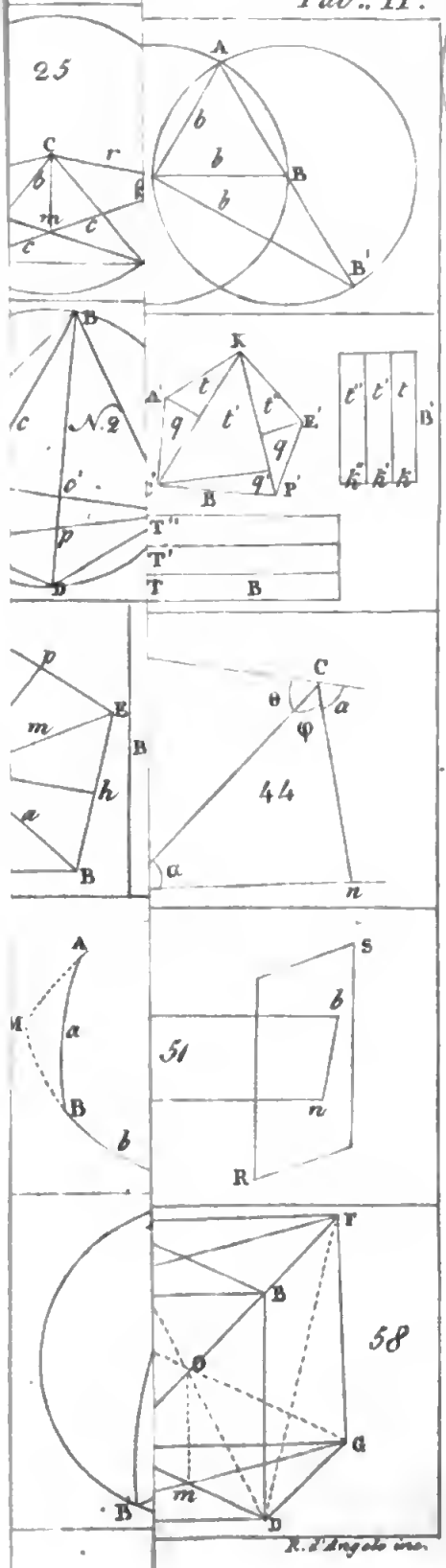
Monografia su' vulcani e nuovo ordinamento di essi. Letta nella R. Accademia delle Scienze ed inserita nel Rendiconto.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Tav. I.



NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI



R. d'Angelo inc.

Digitized by Google

Digitized by Google

BIBLIOTECA